О количестве k-доминирующих множеств в деревьях

Талецкий Дмитрий Сергеевич
dmitalmail@gmail.com

Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследования и преподавание

18 декабря 2021 г.

Независимые множества

- *Независимым множеством* графа (сокращенно НМ) называется произвольное подмножество его попарно несмежных вершин
- Легко видеть, что при удалении ребра из графа количество его независимых множеств строго возрастает
- Таким образом, полный граф K_n и пустой граф O_n содержат минимальное и максимальное количество НМ среди всех n-вершинных графов, соответственно

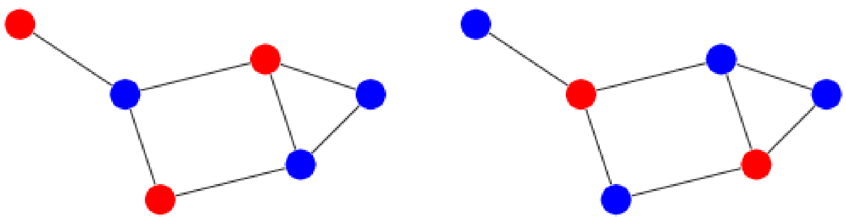


Рис. 1. Примеры независимых множеств
(элементы НМ обозначены красным цветом)

Перечисление НМ в деревьях

- Как известно, звезда S_n и путь P_n содержат максимальное и минимальное количество НМ среди всех n-вершинных деревьев
- В 2007 году Heuberger и Wagner для всех $n, d \geq 3$ отыскали деревья $T_{d,n}$ с максимальной степенью вершин d и максимальным количеством НМ среди всех n-вершинных деревьев
- Деревья $T_{d,n}$ имеют довольно сложную структуру. При этом для любых фиксированных значений параметров $n, d \geq 3$ такое дерево единственно

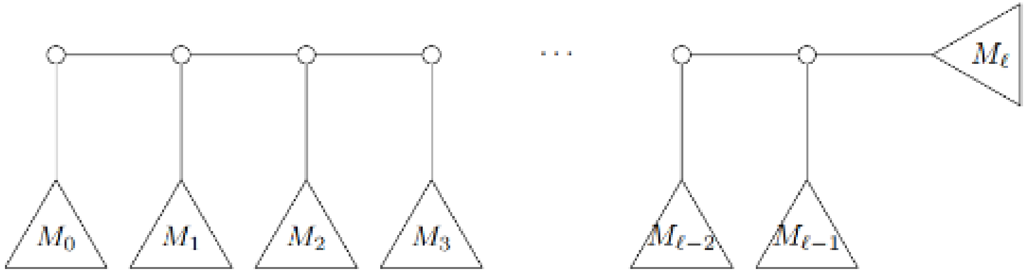


Рис. 2. Структура дерева $T_{3,n}$

Через M_i обозначено полное бинарное дерево высоты $i-1$ или $i+1$

Доминирующие множества

- Множество D вершин графа называется *доминирующим*, если каждая вершина не из D смежна хотя бы с одной вершиной из D.
- Мы будем использовать сокращение «ДМ» для термина «доминирующее множество»
- Количество всех доминирующих множеств графа G обозначается через $\partial(G)$ (или $\partial_1(G)$)

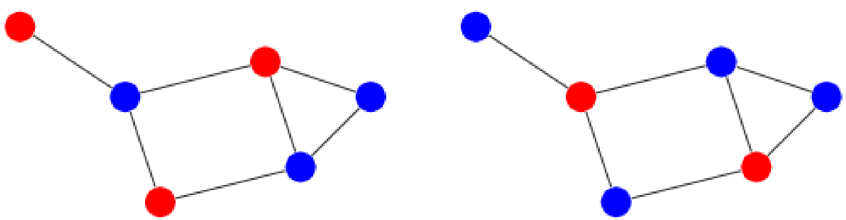


Рис. 3. Примеры доминирующих множеств
Здесь множество вершин одного цвета образует ДМ

Перечисление ДМ в графах

- Нетрудно видеть, что при удалении любого ребра из графа количество его ДМ не уменьшается
- Таким образом, полный граф K_n и пустой граф O_n содержат максимальное и минимальное количество ДМ среди всех n-вершинных графов, соответственно
- Имеем $\partial(K_n) = 2^n - 1$ и $\partial(O_n) = 1$

Перечисление ДМ в деревьях

- В 2006 году Brod и Skupien отыскали деревья, содержащие максимальное и минимальное количество ДМ среди всех n-вершинных деревьев
- Выяснилось, что при всех значениях n максимальное количество ДМ содержит граф-звезда S_n. Нетрудно видеть, что

$$\partial(S_n) = 2^{n-1} + 1$$

- При этом существует экспоненциально много деревьев, содержащих минимально возможное количество ДМ

k-доминирующие множества

Определение

Множество D_k вершин графа называется k-доминирующим, если каждая вершина не из D_k смежна хотя бы с k вершинами из D_k

- Легко видеть, что каждое k-доминирующее множество включает в себя все вершины графа, степени которых меньше k
- Обозначим через $\partial_k(G)$ количество k-доминирующих множеств графа G
- Назовем дерево ∂_k-*максимальным*, если оно содержит максимально возможное количество k-доминирующих множеств
- Аналогично определим ∂_k-*минимальные* деревья
- В работе описана структура ∂_k-максимальных и ∂_k-минимальных деревьев для всех $k \geq 2$

Понятие k-внутренности

Определение

Для любого $k \geq 1$, k-внутренностью графа G назовем его подграф $int_k(G)$, содержащий все вершины G степени не менее k

- **Пример 1.** Если граф G не содержит изолированных вершин, то

$$int_1(G) = G$$

- **Пример 2.** Для любого дерева T граф $int_2(T)$ также является деревом
- **Пример 3.** Пусть P_n и C_n — простой путь и простой цикл на n вершинах, тогда

$$int_3(P_n) = int_3(C_n) = \emptyset$$

Понятие k-внутренности

Пример 4. На данном слайде представлены неизоморфные деревья T_1 и T_2, такие, что

$$int_4(T_1) = int_4(T_2) = 2P_1 \cup P_2$$

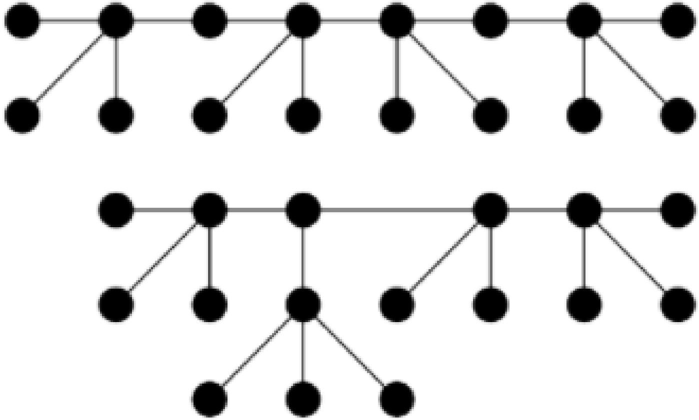


Рис. 4. Деревья с одинаковой 4-внутренностью

∂_k-максимальные деревья

Теорема

Для любых $n, k \geq 2$, $m = \lfloor \frac{n-2}{k-1} \rfloor$ *и* $r = (n-2) - m(k-1)$ *имеет место следующее утверждение:*

- *Если* $m \leq r$, *то* T *является* ∂_k*-максимальным если и только если* T *содержит ровно* m *вершин степени не менее* k *и каждая из этих вершин смежна хотя бы с* k *вершинами степени менее* k*. В этом случае* $\partial_k(T) = 2^m$
- *Если* $m > r$, *то* T *является* ∂_k*-максимальным, если и только если* $int_k(T) = rK_1 \cup T_{k,m-r}$

- Здесь m — максимальное количество вершин степени не менее k, которое может иметь дерево на n вершинах
- Поскольку каждое k-доминирующее множество содержит все вершины степени меньше k, то имеет место неравенство $\partial_k(T) \leq 2^m$

∂_k-максимальные деревья

Теорема

Для любых $n, k \geq 2$, $m = \lfloor \frac{n-2}{k-1} \rfloor$ *и* $r = (n-2) - m(k-1)$ *имеет место следующее утверждение:*

- *Если* $m \leq r$, *то* T *является* ∂_k*-максимальным если и только если* T *содержит ровно* m *вершин степени не менее* k *и каждая из этих вершин смежна хотя бы с* k *вершинами степени менее* k. *В этом случае* $\partial_k(T) = 2^m$
- *Если* $m > r$, *то* T *является* ∂_k*-максимальным, если и только если* $int_k(T) = rK_1 \cup T_{k,m-r}$

- Если значение r достаточно велико, то имеет место равенство $\partial_k(T) = 2^m$
- Однако, если $r < m$, то в дереве найдутся смежные вершины степени ровно k, тогда каждое k-доминирующее множество дерева содержит хотя бы одну из них и $\partial_k(T) < 2^m$

Единственность ∂_k-максимальных деревьев

- Единственным ∂_2-максимальным деревом является путь P_n
- Если $k \geq 3$, то ∂_k-максимальное дерево может быть не единственно
- Так, любое 16-вершинное дерево T, такое что $int_4(T) = 2P_1 \cup P_2$, является ∂_4-максимальным

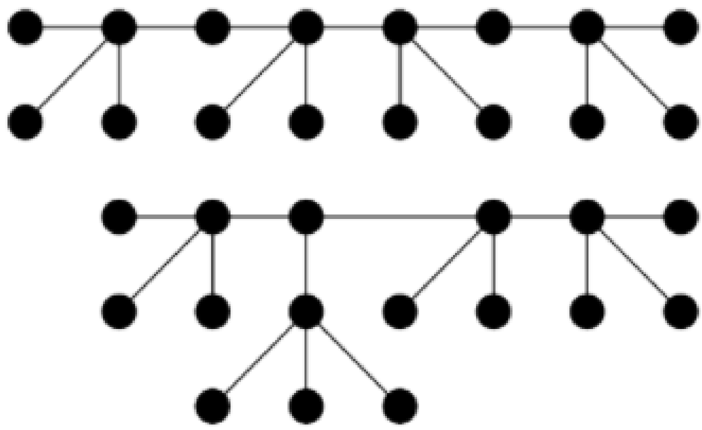


Рис. 5. Два неизоморфных ∂_4-максимальных дерева на 16 вершинах

∂_k-минимальные деревья

Теорема

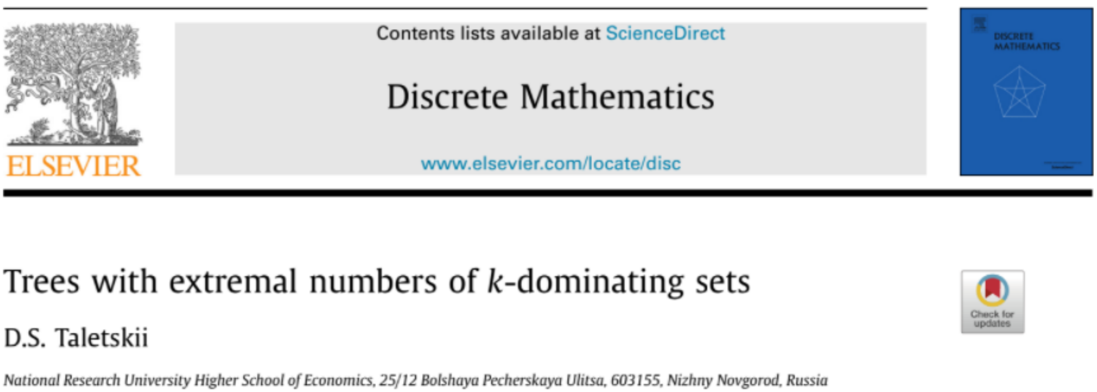
1. *Звезда S_n является единственным ∂_1-максимальным и единственным ∂_2-минимальным деревом*
2. *Путь P_n является единственным ∂_2-максимальным и единственным ∂_3-минимальным деревом*

- Первая часть утверждения 1 была доказана ранее в работе Brod и Skupien. Там же было доказано, что существует экспоненциально много ∂_1-минимальных деревьев (но путь P_n не входит в их число)
- Вторая часть утверждения 1 очевидна, т.к. звезда S_n является единственным деревом, 2-внутренность которого состоит из одной вершины
- Первая часть утверждения 2 доказана в настоящей работе
- Вторая часть утверждения 2 очевидна, т.к. путь P_n является единственным деревом с пустой 3-внутренностью

Публикация по теме доклада

Результат, представленный в докладе, был опубликован в журнале «Discrete Mathematics» в сентябре этого года (на данный момент работа доступна в Online First)

- Taletskii D. Trees with extremal numbers of k-dominating sets // Discrete Mathematics. 2022. Vol. 345. No. 1. Article 112656.



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Discrete Mathematics

www.elsevier.com/locate/disc

Trees with extremal numbers of *k*-dominating sets

D.S. Taletskii

National Research University Higher School of Economics, 25/12 Bolshaya Pecherskaya Ulitsa, 603155, Nizhny Novgorod, Russia

Спасибо за внимание!