Число C_t-насыщения случайного графа

Скоркин Аркадий

Адыгейский государственный университет

17 декабря 2021

Пусть $n \in \mathbb{N}$, F — некоторый граф.
Числом насыщения $\mathrm{sat}(H, F)$ называется наименьшее количество ребер в таком остовном подграфе G графа H, что
1) G не содержит ни одного подграфа, изоморфного F,
2) при добавлении любого ребра из H в G, в нем появляется хотя бы один подграф, изоморфный F.
В случае, если $H = K_n$, будем обозначать число насыщения как $sat(n, F)$

Иными словами, $\mathrm{sat}(n, F)$ – это минимальное количество ребер в максимальном по включению графе без F на множестве вершин $[n]$.

Зыков, а позже независимо Erdős, Hajnal и Moon поставили вопрос о $sat(n, K_m)$.

Erdős, Hajnal, Moon, 1964.

Если $n > m > 2$, то $\mathrm{sat}(n, K_m) = (m-2)n - \binom{m-1}{2}$.

Для $K_{1,m}$ (звезды на $m+1$ вершине) число насыщения также известно.

Kaszonyi, Tuza, 1986.

$$\mathrm{sat}(n, K_{1,m}) = \begin{cases} \binom{m}{2} + \binom{m-n}{2}, & m+1 \le n \le \frac{3m}{2}. \\ \lceil \frac{(m-1)n}{2} - \frac{m^2}{8} \rceil, & n \ge \frac{3m}{2}. \end{cases}$$

Нахождение $\mathrm{sat}(n, C_m)$ тяжелее (как всегда, C_m — простой цикл на m вершинах). Задача полностью решена только для $m = 4, m = 5$.

Ollman, 1972.

При $n \geq 5$ $sat(n, C_4) = \left\lfloor \frac{3n-5}{2} \right\rfloor$.

Chen, 2009.

При $n \geq 21$ $sat(n, C_5) = \left\lceil \frac{7}{10}(n-1) \right\rceil$.

Luo, Shigeno, Zhang, 2015.

- $sat(n, C_6) \leq \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor$ при $n \geq 9$.
- $sat(n, C_6) \geq \left\lceil \frac{7n}{6} - 2 \right\rceil$ при $n \geq 6$.

Furedi, Kim, 2012.

При $m \geq 7$ и $n \geq 2m - 5$

$$\left(1 + \frac{1}{m+2}\right)n - 1 < \mathrm{sat}(n, C_m) < \left(1 + \frac{1}{m-4}\right)n + \binom{m-4}{2}.$$

Здесь и далее $G(n,p)$ — биномиальный случайный граф.

Будем говорить, что граф обладает свойством Q асимптотически почти наверное, если $P(G(n,p) \in Q) \to 1$ при $n \to \infty$.
Судаков и Коранди инициировали изучение задачи насыщения случайных графов.

Sudakov, Korándi, 2017.

Для любого фиксированного $p \in (0,1)$ и фиксированного натурального $m \geq 3$ асимптотически почти наверное

$$\mathrm{sat}(G(n,p), K_m) = (1+o(1)) n \log_{\frac{1}{1-p}} n.$$

Mohammadian, Tayfeh–Rezai, 2018.

Для любого фиксированного $p \in (0,1)$ и фиксированного натурального $m \geq 3$ асимптотически почти наверное

$$\mathrm{sat}(G(n,p), K_{1,m}) = \frac{n(m-1)}{2} - (1+o(1))(m-1)\log_{\frac{1}{1-p}} n.$$

- В случае, когда F — полный граф показано, что число насыщения, грубо говоря, увеличивается в $\log n$ раз после случайного удаления ребер.
- Когда F — звезда на $m+1$ вершине, имеет место асимптотическая устойчивость числа насыщения.
- Поэтому возникает естественный вопрос об асимптотическом поведении числа C_m-насыщения $G(n,p)$.

Первый результат связан с асимптотикой поведения числа насыщения в случае $m \geq 5$.

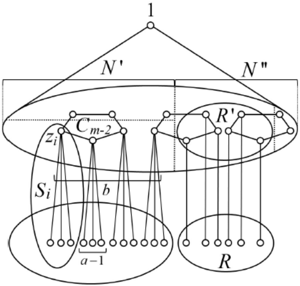
Теорема 1.

Пусть p — фиксированное число от 0 до 1, тогда для любого $m \geq 5$ асимптотически почти наверное верно следующее неравенство

$$n + \frac{n}{4(m-1)\log_{\frac{1}{1-p}} n}(1 - o(1)) \leq \mathrm{sat}(G(n,p), C_m) \leq$$

$$\leq n + \frac{n}{2\log_{\frac{1}{1-p}} n}(1 + o(1)).$$

Доказательство верхней оценки строится конструктивно, основывясь на факте, что с большой вероятностью почти все вершины $G(n, p)$ можно покрыть индуцированными подграфами $K_{1,a}$, где $a = 2(1 + o(1)) \log_{\frac{1}{1-p}} n$.



Нижняя оценка доказывается с помощью факта, что при рекурентном удалении вершин степени 1 из C_m-насыщенного подграфа, оставшийся граф будет состоять из $\Omega(n/\ln n)$ вершин, степени более 1, а диаметр графа будет ограничен.

Второй и третий результаты доказывают верхнюю и нижнюю оценку C_4-насыщения графа $G(n,p)$ соответственно.

Теорема 2.

Пусть p - фиксированное число от 0 до 1, тогда асимптотически почти наверное верно

$$\mathrm{sat}(G(n,p), C_4) \leq \frac{3(1+(1-p)^3)}{2(1-(1-p)^3)} n(1+o(1)),$$

когда $p > 1 - 1/\sqrt[3]{7}$, и

$$\mathrm{sat}(G(n,p), C_4) \leq n\left(\frac{s+1}{2} + s(1-p)^s + \frac{s(1-p)^{2s}}{1-(1-p)^s}\right)(1+o(1)),$$

когда $p \leq 1 - 1/\sqrt[3]{7}$, где s — наименьшее натуральное число такое, что $(2s^2+1)(1-p)^s < 1$.

Данные оценки доказываются конструктивно.

Теорема 3.

Пусть p — фиксированное число от 0 до 1, тогда асимптотически почти наверное

$$\mathrm{sat}(G(n,p), C_4) \geq \frac{3}{2}n(1+o(1)).$$

Доказывается с помощью исследования локальной структуры насыщающего подграфа в случайном графе, а именно подсчета вершин малой степени и также подсчета вершин малой степени в окрестности вершин малой степени.

В случае насыщения K_n

- Точный ответ известен только при $m = 4, m = 5$.
- При $m \geq 6$ получаем только верхнюю и нижнюю оценку.

В случае насыщения $G(n, p)$

- Асимптотика найдена при всех $m \geq 5$. Число насыщение в константу раз уменьшается после удаления ребер.
- При $m = 4$ нам удалось лишь оценить число насыщения. В отличие от предыдущего случая оно асимптотически не убывает после случайного удаления ребер.