Сложность задачи о взвешенной раскраске для некоторых наследственных классов графов.

Развенская Ольга Олеговна, к.ф.-м.н.

НИУ ВШЭ – Нижний Новгород,
Лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур

Содержание

Взвешенная вершинная раскраска

Вершинная раскраска графов

Определение

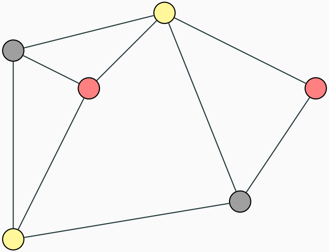
Вершинной раскраской графа $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ называется функция $\mathrm{c} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{N}$, такая, что $\mathrm{c(u)} \neq \mathrm{c(v)}$ для любых двух смежных вершин u и v в G. Элементы множества $\bigcup\limits_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} \{\mathrm{c(v)}\}$ называются *цветами*.

Наименьшее количество цветов в раскрасках вершин графа G обозначается через $\chi(\mathrm{G})$ и называется *хроматическим числом* графа G.

Вершинная раскраска графов

Определение

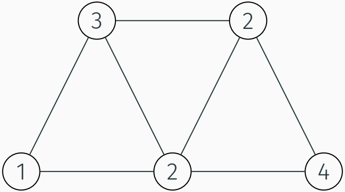
Задача о вершинной раскраске (кратко, *задача* ВР) для заданного графа состоит в вычислении его хроматического числа.



Взвешенный граф

Определение

Для данного графа $G = (V, E)$ и функции $w : V \longrightarrow \mathbb{N}$ пара (G, w) называется *взвешенным графом*.

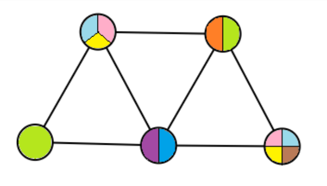


Взвешенная вершинная раскраска графов

Определение

Для взвешенного графа (G, w) задача *о взвешенной вершинной раскраске* (кратко, *задача* ВВР) состоит в нахождении минимального числа k, обозначаемого через $\chi_{\mathrm{w}}(\mathrm{G})$, такого, что существует функция $\mathrm{c} : \mathrm{V} \longrightarrow 2^{\{1,2,\ldots,\mathrm{k}\}}$, где $|\mathrm{c}(\mathrm{v})| = \mathrm{w}(\mathrm{v})$ для любой $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ и $\mathrm{c}(\mathrm{v}_1) \cap \mathrm{c}(\mathrm{v}_2) = \emptyset$ для любого $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2 \in \mathrm{E}$.

Число $\chi_{\mathrm{w}}(\mathrm{G})$ называется *взвешенным хроматическим числом* взвешенного графа (G, w).



Взаимосвязь задач ВР и ВВР

Задача ВВР обобщает задачу ВР, поскольку $\chi(\mathrm{G}) = \chi_{\mathrm{I}}(\mathrm{G})$, где I задает вес каждой вершины, равный 1.

Задача ВВР **— «замыкание» задачи** ВР

Расширение: Некоторые важные алгоритмические приемы работают путем перехода от невзвешенных графов к их собственным подграфам, но с весами вершин.

Поэтому задачу ВР необходимо «замкнуть», т.е. рассматривать веса вершин.

Значение задач ВР и ВВР

Задача ВР и ВВР — формализация прикладных задач на математическом языке

- Приложения задачи ВР: Теория расписаний, складская логистика и т.д. *[Christofides1975]*
- Приложения задачи ВВР: Задача распределения радиочастот при организации беспроводной связи и задача планирования литья деталей на машине пакетной обработки с учетом совместимости заданий. *[Mishra2005]*, *[Gavranovich2000]*

Замечания о сложности задач ВР и ВВР

Определение 1

Алгоритм для решения подзадачи задачи ВВР называется *полиномиальным*, если время его работы ограничено сверху некоторым полиномом от длины входной информации (=суммы верхних целых частей логарифмов весов вершин+1) входного взвешенного графа.

Определение 2

Алгоритм для решения подзадачи задачи ВВР называется *псевдополиномиальным*, если время его работы ограничено сверху некоторым полиномом от количества вершин и от максимального веса вершин входного взвешенного графа.

Замечание 1

Любой псевдополиномиальный алгоритм решения подзадачи задачи ВВР будет полиномиальным для данной подзадачи задачи ВР.

Замечание 2

Задача ВР является NP-*трудной*, т.е. к ней полиномиально сводится любая задача класса NP.

Задача ВВР является NP-*трудной в сильном смысле*, т.е. к ней полиномиально сводится любая задача класса NP в случае, когда все веса ограничены полиномом от числа вершин (в частности, когда все веса единичные).

Замечание 3

Для решения задачи ВР не существует *полиномиальных алгоритмов*, иначе P=NP.

Для решения задачи ВВР не существует *псевдополиномиальных алгоритмов*, иначе P=NP.

Наследственный класс графов

Определение

Класс обыкновенных графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно операции удаления вершин.

Любой наследственный (и только наследственный) класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{S}$.

Принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$ и графы из класса $\mathcal{X}$ называются $\mathcal{S}$*-свободными*.

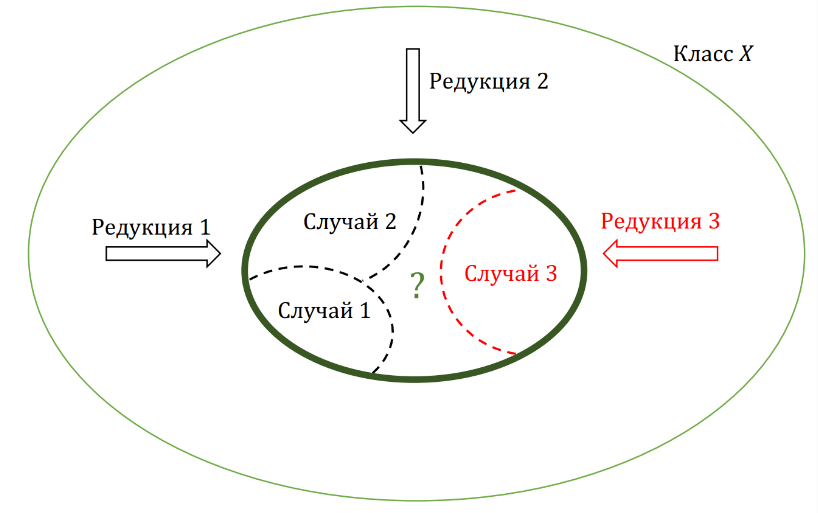
Примеры

Леса=$\{\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5, \ldots\}$-свободные графы (определение).

Двудольные графы=$\{\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_5, \mathrm{C}_7 \ldots\}$-свободные графы (теорема Кенига).

Дизъюнктные объединения полных графов=$\{\mathrm{P}_3\}$-свободные графы (свойство).

Распространенный подход к построению полиномиальных алгоритмов



Методы редукции графов

Методы редукции графов

Некоторые примеры методов редукции графов:

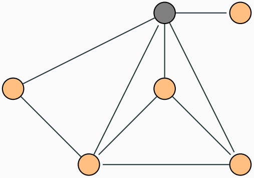
- Модульное разложение
- Разложение посредством разделяющих клик
- Элиминация вершин с независимой анти-окрестностью

Модульное разложение

Определение

Множество $M \subseteq V$ называется *модулем* в графе $G = (V, E)$, если для любой $x \in V \setminus M$ вершина x либо смежна со всеми вершинами M, либо несмежна ни с одной из них.

Если $1 < |M| < |V|$, то M называется *нетривиальным*.



Утверждение

Задача ВВР для любого наследственного класса полиномиально сводится к той же задаче для графов из того же класса, не содержащих нетривиальных модулей.

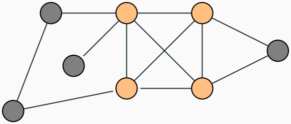
Разложение посредством разделяющих клик

Определение

Клика — это подмножество попарно смежных вершин.

Определение

Разделяющая клика — это клика в графе, удаление которой приводит к увеличению количества компонент связности.



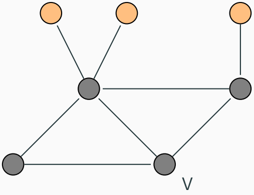
Утверждение

Задача ВВР для любого наследственного класса полиномиально сводится к той же задаче для графов из того же класса, не содержащих разделяющих клик.

Элиминация вершин с независимой анти-окрестностью

Определение

Анти-окрестностью $\overline{N(v)}$ вершины v называется множество вершин, с ней не смежных (не включая ее саму).



Результат 1

Задача ВВР для любого наследственного класса полиномиально сводится к той же задаче для графов из того же класса, не содержащих вершин с независимой анти-окрестностью.

Классы эффективной разрешимости задачи ВВР

Классы эффективной разрешимости задачи ВВР

Некоторые примеры наследственных классов графов с эффективной разрешимостью задачи ВВР.

- Совершенные графы и их значение
- O_3-свободные графы и их значение

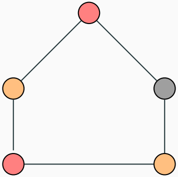
Совершенные графы и их значение

Определение

Количество вершин в клике наибольшего размера в графе G обозначается через $\omega(\mathrm{G})$ и называется *кликовым числом* графа G. Очевидно, что $\chi(\mathrm{G}) \geq \omega(\mathrm{G})$.

Определение

Граф называется *совершенным*, если кликовое и хроматическое числа равны для него и любого его порожденного подграфа.



Граф, не являющийся совершенным C_5:
$\chi(\mathrm{C}_5) = 3$, но $\omega(\mathrm{C}_5) = 2$.

Утверждение [Chudnovsky2006]

Класс совершенных графов совпадает с $\mathrm{Free}(\{\mathrm{C}_5, \overline{\mathrm{C}_5}, \mathrm{C}_7, \overline{\mathrm{C}_7}, \ldots\})$.

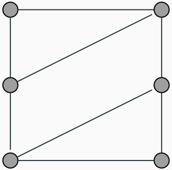
Утверждение [Cornuejols2003]

Принадлежность графа классу совершенных графов распознается за полиномиальное время от числа его вершин.

Утверждение [Grötschel1984]

Задача ВВР полиномиально разрешима в классе совершенных графов.

O_3-свободные графы и их значение



O_3-свободный граф.

Результат 2

Задача ВВР для любого O_3-свободного графа $(G = (V, E), w)$ разрешима за время $O((\sum_{v \in V} w(v))^3)$.

Сложность задач BP и BBP для наследственных классов, определяемых порожденными запретами небольшого размера

Сложность задач ВР и ВВР для наследственных классов, определяемых порожденными запретами небольшого размера

1. Обзор известных результатов
2. Результаты автора доклада

Обзор известных результатов

Факт 1 [Kral2001]

Задача ВР полиномиально разрешима для класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{H}\})$, если H — порожденный подграф графа P_4 или графа $\mathrm{P}_3 + \mathrm{K}_1$, иначе она является NP-трудной в данном классе.

Факт 2 [Lozin2017]

Известен сложностной статус задачи ВР для всех наследственных классов, определяемых порожденными запретами на не более чем 4 вершинах каждый, кроме четырех:

$$\mathrm{Free}(\{\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{O}_4\}), \mathrm{Free}(\{\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{K}_2 + \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_4\}),$$

$$\mathrm{Free}(\{\mathrm{C}_4, \mathrm{O}_4\}), \mathrm{Free}(\{\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{K}_2 + \mathrm{O}_2\}).$$

Известно, что задача ВР для $\{\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{K}_2 + \mathrm{O}_2\}$-свободных графов полиномиально сводится к той же задаче для графов из класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{K}_2 + \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_4\})$.

Факт 3

Усилиями нескольких авторов *[Hoang2015]*, *[Karthick2017]*, *[Malyshev2014/21]* количество пар связных 5-вершинных запрещенных порожденных фрагментов с открытым сложностным статусом задачи ВР было уменьшено до трех:

$$\{\mathrm{P}_5, \mathrm{H}\}, \text{ где } \mathrm{H} \in \{\mathrm{K}_{2,3}, \mathrm{K}^{+}_{2,3}, \mathrm{W}_4, \overline{\mathrm{K}_5 - \mathrm{e}}, \overline{\mathrm{P}_3 + \mathrm{P}_2}\}.$$

Результаты автора доклада

Вклад автора в уменьшение количества «белых пятен» до трех:

Результат 3

Для любого фиксированного p задача ВР полиномиально разрешима для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов.

Задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\})$.

Результаты автора доклада

Рассмотрение всех трех попарных пересечений оставшихся трех «белых пятен»:

Факт 4 [Gribanov2020]

Задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{P}_5, \mathrm{K}_{2,3}, \mathrm{W}_4\})$.

Результат 4

Задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{P}_5, \mathrm{K}_{2,3}, \mathrm{K}^+_{2,3}\})$.

Результат 5

Задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса $\mathrm{Free}(\{\mathrm{P}_5, \mathrm{K}^+_{2,3}, \mathrm{W}_4\})$.

Публикации по теме доклада

- Christofides N. Graph theory: An algorithmic approach. — Academic Press, 1975. — 400 P.
- Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Annals of Mathematics. 2006. V. 164. P. 51–229.
- Cornuejols G., Liu X.,Vuskovic K. A polynomial algorithm for recognizing perfect graphs // Proceedings of 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2003.
- Gavranovich H., Finke G. Graph partitioning and set covering for the optimal design of a production system in the metal industry // Proceedings of the Second Conference on Management and Control of Production and Logistics. — 2000. — V. 2. — P. 603–608.
- Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Polynomial algorithms for perfect graphs // Annals of Discrete Mathematics. 1984. V. 21. P. 325–356.
- Hoàng C., Lazzarato D. Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(\mathrm{P}_5, \overline{\mathrm{P}_5})$-free graphs and similar graph classes // Discrete Applied Mathematics. 2015. V. 186. P. 105–111.
- Karthick T., Maffray F., Pastor L. Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. 2017. V. 81, № 3. P. 1053–1074

Публикации по теме доклада

- Kral D., Kratochvil J., Tuza Z., Woeginger G. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. 2001. V. 2204. P. 254–262.
- Lozin V. V., Malyshev D. S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics. 2017. V. 216. P. 273–280.
- Malyshev D. S. The coloring problem for classes with two small obstructions // Optimization Letters. 2014. V. 8, № 8. P. 2261–2270.
- Malyshev D. S. The vertex colourability problem for $\{\mathrm{claw}, \mathrm{butterfly}\}$-free graphs is polynomial-time solvable // Optimization Letters. 2021.
- Malyshev D. S. The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Applied Mathematics. 2018. V. 47. P. 423–432.
- Malyshev D. S. Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // Journal of Combinatorial Optimization. 2015. V. 31, № 2. P. 833–845.
- Mishra A., Banerjee S, Arbaugh W. A. Weighted coloring based channel assignment for WLANs // Mobile Computing and Communications Review. — 2005. — V. 9, № 3. — P. 19–31.

Публикации автора по теме доклада

1. Malyshev D. S., Lobanova (Razvenskaya) O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. 2017. V. 219. P. 158–166.
2. Malyshev D. S., Razvenskaya O. O., Pardalos P. M. The computational complexity of weighted vertex coloring for $\{\mathrm{P}_5, \mathrm{K}_{2,3}, \mathrm{K}^+_{2,3}\}$-free graphs // Optimization Letters. 2021. V. 15, №1. P. 137–152.
3. Развенская О. О. О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске // Журнал Средневолжского Математического Общества. 2020. Т. 22, № 4. С. 442–448.
4. Развенская О. О., Малышев Д. С. Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторых двух наследственных классов графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2021. Т. 28, № 1. С. 15–47.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!