Запрещённые подграфы для графов с ограниченным снизу собственным значением

Александр Полянский

МФТИ

18 декабря 2021 г.

Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследования и преподавание

Сочи, Сириус

Мотивация – равноугольные прямые

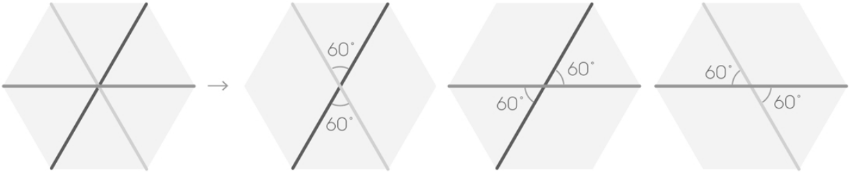
Равноугольные прямые

Конечное множество прямых в $\mathbb{R}^n$ называется равноугольным, если углы между любыми двумя прямыми в это множестве равны.

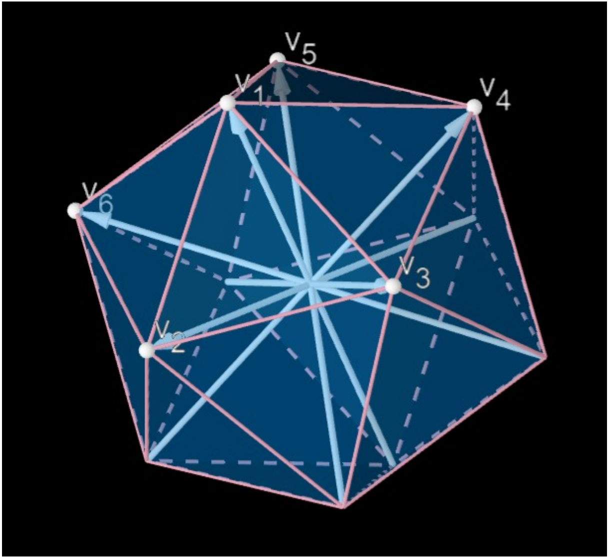
Мотивация – равноугольные прямые

Равноугольные прямые

Конечное множество прямых в $\mathbb{R}^n$ называется равноугольным, если углы между любыми двумя прямыми в это множестве равны.



Мотивация – равноугольные прямые



Равноугольные прямые – история вопроса

$N(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Герзон '73

$N(n) \leq \binom{n}{2}$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Герзон '73

$N(n) \leq \binom{n}{2}$. Несложный линейно-алгебраический метод.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Герзон '73

$N(n) \leq \binom{n}{2}$. Несложный линейно-алгебраический метод.

де Каен '00

$N(n) \geq \frac{2}{9}(n+1)^2$ для $n = 6 \cdot 4^k - 1$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Герзон '73

$N(n) \leq \binom{n}{2}$. Несложный линейно-алгебраический метод.

де Каен '00

$N(n) \geq \frac{2}{9}(n+1)^2$ для $n = 6 \cdot 4^k - 1$.Общий угол $\to \pi/2$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N_\alpha(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$ с углом $\arccos\alpha$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N_\alpha(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$ с углом $\arccos\alpha$.

Лемменс, Зидель '73

$N_{1/3}(n) = 2n - 2$ для $n \geq 15$.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N_\alpha(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$ с углом $\arccos\alpha$.

Лемменс, Зидель '73

$N_{1/3}(n) = 2n - 2$ для $n \geq 15$.

Неумайер '89

$N_{1/5}(n) = \lfloor \frac{3}{2}(n-2) \rfloor$ для больших n.

Равноугольные прямые – история вопроса

$N_\alpha(n) :=$ max число равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$ с углом $\arccos\alpha$.

Лемменс, Зидель '73

$N_{1/3}(n) = 2n - 2$ для $n \geq 15$.

Неумайер '89

$N_{1/5}(n) = \lfloor \frac{3}{2}(n-2) \rfloor$ для больших n.

Неуман '73

$N_\alpha(n) \leq 2n$ для $1/\alpha \neq 2\ell + 1$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Бух '16

$N_\alpha(n) \le c_\alpha n$ для больших n, где $c_\alpha = 2^{O(1/\alpha^2)}$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Бух '16

$N_\alpha(n) \le c_\alpha n$ для больших n, где $c_\alpha = 2^{O(1/\alpha^2)}$.

Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17

$N_\alpha(n) \le 1.93n$ для больших n и $\alpha \ne 1/3$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Бух '16

$N_\alpha(n) \le c_\alpha n$ для больших n, где $c_\alpha = 2^{O(1/\alpha^2)}$.

Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17

$N_\alpha(n) \le 1.93n$ для больших n и $\alpha \ne 1/3$.

Гипотеза (Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17)

$N_{1/(2k-1)}(n) = \lfloor kn/(k-1) \rfloor$ для больших n.

Равноугольные прямые – история вопроса

Бух '16

$N_\alpha(n) \le c_\alpha n$ для больших n, где $c_\alpha = 2^{O(1/\alpha^2)}$.

Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17

$N_\alpha(n) \le 1.93n$ для больших n и $\alpha \ne 1/3$.

Гипотеза (Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17)

$N_{1/(2k-1)}(n) = \lfloor kn/(k-1) \rfloor$ для больших n.

Цзян, АП '20

$N_\alpha(n) \le 1.49n$ для больших n и $\alpha \notin \{1/3, 1/(1+2\sqrt{2}), 1/5\}$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Бух '16

$N_\alpha(n) \le c_\alpha n$ для больших n, где $c_\alpha = 2^{O(1/\alpha^2)}$.

Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17

$N_\alpha(n) \le 1.93n$ для больших n и $\alpha \ne 1/3$.

Гипотеза (Балла, Драхлер, Киваш, Судаков '17)

$N_{1/(2k-1)}(n) = \lfloor kn/(k-1) \rfloor$ для больших n.

Цзян, АП '20

$N_\alpha(n) \le 1.49n$ для больших n и $\alpha \notin \{1/3, 1/(1+2\sqrt{2}), 1/5\}$.
$N_{1/3}(n) = 2n + O(1)$ and $N_{1/5}(n), N_{1/(1+2\sqrt{2})}(n) = \frac{3}{2}n + O(1)$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Гипотеза (Цзын, АП, 20)

$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} \cdot n + O(1)$, где k_α некоторое натуральное число, которое мы определим чуть-чуть попозже. Если $k_\alpha = +\infty$, то $N_\alpha(n) = n + O(d)$.

Равноугольные прямые – история вопроса

Гипотеза (Цзын, АП, 20)

$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} \cdot n + O(1)$, где k_α некоторое натуральное число, которое мы определим чуть-чуть попозже. Если $k_\alpha = +\infty$, то $N_\alpha(n) = n + O(d)$.

Jiang, Tidor, Yao, Zhang, Zhao, 2021

Эта гипотеза верна!

Некоторые обозначения

Собственные значения

Под собственными значениями графа будут подразумеваться собственные значения его матрицы инцидентности.

Некоторые обозначения

Собственные значения

Под собственными значениями графа будут подразумеваться собственные значения его матрицы инцидентности.

Обозначения

$I :=$ единичная матрица;
$J :=$ матрица из 1.

Равноугольные прямые – тривиальные соображения

- Рассмотрим равноугольные прямые $\ell_1, \ldots, \ell_m$ в $\mathbb{R}^n$ и выберем единичный вектор $v_1, \ldots, v_m$ в направлении каждой из этих прямых.

Равноугольные прямые – тривиальные соображения

- Рассмотрим равноугольные прямые $\ell_1, \ldots, \ell_m$ в $\mathbb{R}^n$ и выберем единичный вектор $v_1, \ldots, v_m$ в направлении каждой из этих прямых.
- Рассмотрим матрицу Грама для полученного набора векторов $\langle v_i, v_j \rangle_{i,j=1\ldots m}$.

Равноугольные прямые – тривиальные соображения

- Рассмотрим равноугольные прямые $\ell_1, \ldots, \ell_m$ в $\mathbb{R}^n$ и выберем единичный вектор $v_1, \ldots, v_m$ в направлении каждой из этих прямых.
- Рассмотрим матрицу Грама для полученного набора векторов $\langle v_i, v_j \rangle_{i,j=1\ldots m}$.
- Получилась неотрицательноопределённая симметричная матрица, ранга не более n, с 1 на диагонале, все остальные элементы равны $\pm\alpha$.

Равноугольные прямые – тривиальные соображения

- Рассмотрим равноугольные прямые $\ell_1, \dots, \ell_m$ в $\mathbb{R}^n$ и выберем единичный вектор $v_1, \dots, v_m$ в направлении каждой из этих прямых.
- Рассмотрим матрицу Грама для полученного набора векторов $\langle v_i, v_j \rangle_{i,j=1\dots m}$.
- Получилась неотрицательноопределённая симметричная матрица, ранга не более n, с 1 на диагонале, все остальные элементы равны $\pm\alpha$.
- Верно и обратное. Каждая неотрицательноопределённая симметричная матрица, ранга не более n, с 1 на диагонале, все остальные элементы которой равны $\pm\alpha$, является матрице Грама для набора единичных векторов, которые в свою очередь определяют семейство из m равноугольных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j \rangle = \pm\alpha$.

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j \rangle = \pm\alpha$. Тогда матрица инцидентности A графа $G = \left\{ v_i v_j : \langle v_i, v_j \rangle = -\alpha \right\}$ должна линейно выражаться через

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j \rangle = \pm\alpha$. Тогда матрица инцидентности A графа $G = \left\{ v_i v_j : \langle v_i, v_j \rangle = -\alpha \right\}$ должна линейно выражаться через матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$, единичную матрицу I и матрицу из единиц J. А именно …

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j \rangle = \pm\alpha$. Тогда матрица инцидентности A графа $G = \left\{ v_i v_j : \langle v_i, v_j \rangle = -\alpha \right\}$ должна линейно выражаться через матрицу Грама $\langle v_i, v_j \rangle$, единичную матрицу I и матрицу из единиц J. А именно ...

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^{-1} - 1}\right) \langle v_i, v_j \rangle = I - \frac{2\alpha}{1 - \alpha} A + \frac{1}{\alpha^{-1} - 1} J.$$

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j\rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j\rangle = \pm\alpha$. Тогда матрица инцидентности A графа $G = \left\{v_i v_j : \langle v_i, v_j\rangle = -\alpha\right\}$ должна линейно выражаться через матрицу Грама $\langle v_i, v_j\rangle$, единичную матрицу I и матрицу из единиц J. А именно ...

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^{-1} - 1}\right)\langle v_i, v_j\rangle = I - \frac{2\alpha}{1-\alpha}A + \frac{1}{\alpha^{-1} - 1}J.$$

Подставляя $\alpha = 1/(2k-1)$, мы получаем

Важное равенство

Рассмотрим матрицу Грама $\langle v_i, v_j\rangle$ для $v_1, \ldots, v_m$, тогда $\langle v_i, v_j\rangle = \pm\alpha$. Тогда матрица инцидентности A графа $G = \left\{v_i v_j : \langle v_i, v_j\rangle = -\alpha\right\}$ должна линейно выражаться через матрицу Грама $\langle v_i, v_j\rangle$, единичную матрицу I и матрицу из единиц J. А именно …

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^{-1} - 1}\right)\langle v_i, v_j\rangle = I - \frac{2\alpha}{1-\alpha}A + \frac{1}{\alpha^{-1}-1}J.$$

Подставляя $\alpha = 1/(2k-1)$, мы получаем

$$\frac{2k-1}{2k-2}\langle v_i, v_j\rangle = I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J.$$

Пример

Если окажется, что для некоторой матрицы инциденций A матрица

$$\frac{2k-1}{2k-2}M = I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J$$

неотрицательно определена, а точнее матрица $I - \frac{1}{k-1}A$, то матрица M будет матрицей Грама для некоторого набора векторов.

Пример

Если окажется, что для некоторой матрицы инциденций A матрица

$$\frac{2k-1}{2k-2}M = I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J$$

неотрицательно определена, а точнее матрица $I - \frac{1}{k-1}A$, то матрица M будет матрицей Грама для некоторого набора векторов.

Рассмотрим матрицу инцидентности полного графа K_k

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример

Если окажется, что для некоторой матрицы инциденций A матрица

$$\frac{2k-1}{2k-2}M = I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J$$

неотрицательно определена, а точнее матрица $I - \frac{1}{k-1}A$, то матрица M будет матрицей Грама для некоторого набора векторов.
Рассмотрим матрицу инцидентности полного графа K_k

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У неё $k-1$ является наибольшим собственным значением кратности 1. Тогда $I - \frac{1}{k-1}B$ неотрицательно определена.

Пример

Теперь рассмотрим пример чуть посложнее. А именно матрицу размера $k \cdot s$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix}$$

Пример

Теперь рассмотрим пример чуть посложнее. А именно матрицу размера $k \cdot s$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix} = B \otimes I_s.$$

Тогда $k - 1$ является наибольшим собственным значением матрицы A и имеет кратность s.

Пример

Теперь рассмотрим пример чуть посложнее. А именно матрицу размера $k \cdot s$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix} = B \otimes I_s.$$

Тогда $k - 1$ является наибольшим собственным значением матрицы A и имеет кратность s.
Тогда матрица $I - \frac{1}{k-1}A$ является неотрицательно определённой и 0 является корнем кратности s.

Пример

Теперь рассмотрим пример чуть посложнее. А именно матрицу размера $k \cdot s$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix} = B \otimes I_s.$$

Тогда $k-1$ является наибольшим собственным значением матрицы A и имеет кратность s.
Тогда матрица $I - \frac{1}{k-1}A$ является неотрицательно определённой и 0 является корнем кратности s.
Тогда и матрица $I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J$ является неотрицательно определенной и 0 является корнем кратности по крайней мере $s-1$.

Пример

Тогда матрица M является матрицей Грама для равноугольных прямых с углом $\arccos \frac{1}{2k-1}$.

$$\frac{2k-1}{2k-2} M = I - \frac{1}{k-1} A + \frac{1}{2k-2} J.$$

Пример

Тогда матрица M является матрицей Грама для равноугольных прямых с углом $\arccos \frac{1}{2k-1}$.

$$\frac{2k-1}{2k-2}M = I - \frac{1}{k-1}A + \frac{1}{2k-2}J.$$

Размер M соответствует числу прямых$ks \leq N_{1/(2k-1)}(n)$, а ранг размерности $ks - s + 1 \geq n$.

Пример

Тогда матрица M является матрицей Грама для равноугольных прямых с углом $\arccos \frac{1}{2k-1}$.

$$\frac{2k-1}{2k-2} M = I - \frac{1}{k-1} A + \frac{1}{2k-2} J.$$

Размер M соответствует числу прямых$ks \leq N_{1/(2k-1)}(n)$, а ранг размерности $ks - s + 1 \geq n$. То есть можно сказать, что

$$N_{1/(2k-1)}(n) \geq \frac{k}{k-1} n + O(1).$$

Небольшое обсуждение

То есть основная трудность состоит в том, чтобы доказать оценку сверху на $N_{1/(2k-1)}(n)$.

Небольшое обсуждение

То есть основная трудность состоит в том, чтобы доказать оценку сверху на $N_{1/(2k-1)}(n)$.

- Какой смысл носит k для $\alpha = \frac{1}{2k-1}$? Это наименьший размер графа, для которого $\frac{1}{k} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ является наибольшим собственным значением.

Небольшое обсуждение

То есть основная трудность состоит в том, чтобы доказать оценку сверху на $N_{1/(2k-1)}(n)$.

- Какой смысл носит k для $\alpha = \frac{1}{2k-1}$? Это наименьший размер графа, для которого $\frac{1}{k} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ является наибольшим собственным значением.
- В общем случае мы говорили, что наша гипотеза было в том, что

$$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} n + O_\alpha(1),$$

где k_α — наименьший размер графа, для которого $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ является наибольшим собственным значением.

Что было доказано раньше?

В 2017 году мы с Цзылином Цзяном доказали, что если для связных графов с наибольшим собственным значением не превосходящим $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ существует конечное число запрещённых (индуцированных) подграфов, то верно равенство

$$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} n + O_\alpha(1).$$

Что было доказано раньше?

В 2017 году мы с Цзылином Цзяном доказали, что если для связных графов с наибольшим собственным значением не превосходящим $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ существует конечное число запрещённых (индуцированных) подграфов, то верно равенство

$$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} n + O_\alpha(1).$$

Это мотивировало нас найти все такие λ, что существует конечное число запрещённых (индуцированных) пографов для семейства графов $\mathcal{F}(\lambda)$ с наибольшим собственным значением не превосходящим λ.

Что было доказано раньше?

В 2017 году мы с Цзылином Цзяном доказали, что если для связных графов с наибольшим собственным значением не превосходящим $\frac{2\alpha}{1-\alpha}$ существует конечное число запрещённых (индуцированных) подграфов, то верно равенство

$$N_\alpha(n) = \frac{k_\alpha}{k_\alpha - 1} n + O_\alpha(1).$$

Это мотивировало нас найти все такие λ, что существует конечное число запрещённых (индуцированных) пографов для семейства графов $\mathcal{F}(\lambda)$ с наибольшим собственным значением не превосходящим λ. Оказалось, что это старая задача Буссемейкера и Неумайера (1992). Найти все такие λ, для которых $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет конечное число запрещённых (индуцированных) подграфов.

Старый основной результат

Цзян, АП' 20

Для семейства $\mathcal{F}(\lambda)$ существует конечное число запрещенных (индуцированных) подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2.05817$ (и ещё счётное число исключений между 2 и λ').

Новая мотивация (по работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанг, Жао)

- Другой классической задачей дискретной геометрии является задача о двухдистанционных сферических множествах, то есть конечных множествах на единичной сфере таких, что все расстояниях между точками принимают два значения.

Новая мотивация (по работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанг, Жао)

- Другой классической задачей дискретной геометрии является задача о двухдистанционных сферических множествах, то есть конечных множествах на единичной сфере таких, что все расстояниях между точками принимают два значения.
- Одна из вариаций этой задачи — исследовать наибольшее число точек $N_{\alpha,\beta}(n)$ на сфере S^{n-1} таких, что все скалярные произведения равны α и β.

Новая мотивация (по работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанг, Жао)

- Другой классической задачей дискретной геометрии является задача о двухдистанционных сферических множествах, то есть конечных множествах на единичной сфере таких, что все расстояниях между точками принимают два значения.
- Одна из вариаций этой задачи — исследовать наибольшее число точек $N_{\alpha,\beta}(n)$ на сфере S^{n-1} таких, что все скалярные произведения равны α и β.
- Вопрос о $N_{\alpha,-\alpha}(n)$ соотвествует вопросу о равноугольных прямых.

Новая мотивация (по работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанг, Жао)

- Другой классической задачей дискретной геометрии является задача о двухдистанционных сферических множествах, то есть конечных множествах на единичной сфере таких, что все расстояниях между точками принимают два значения.
- Одна из вариаций этой задачи — исследовать наибольшее число точек $N_{\alpha,\beta}(n)$ на сфере S^{n-1} таких, что все скалярные произведения равны α и β.
- Вопрос о $N_{\alpha,-\alpha}(n)$ соотвествует вопросу о равноугольных прямых.
- Оказалось, что в ряде режимов существует аналогичная связь между "гипотезой" для $N_{\alpha,\beta}(n)$ и существованием конечного числа запрещённых подграфов для графов со знаком.

Новая мотивация (по работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанг, Жао)

- Другой классической задачей дискретной геометрии является задача о двухдистанционных сферических множествах, то есть конечных множествах на единичной сфере таких, что все расстояниях между точками принимают два значения.
- Одна из вариаций этой задачи — исследовать наибольшее число точек $N_{\alpha,\beta}(n)$ на сфере S^{n-1} таких, что все скалярные произведения равны α и β.
- Вопрос о $N_{\alpha,-\alpha}(n)$ соотвествует вопросу о равноугольных прямых.
- Оказалось, что в ряде режимов существует аналогичная связь между “гипотезой“ для $N_{\alpha,\beta}(n)$ и существованием конечного числа запрещённых подграфов для графов со знаком.
- Графом со знаком называется такой граф, что каждому его ребру приписано ±1. То есть в матрице инцидентности стоят ±1 на месте рёбер.

Основные результаты

Цзян, АП' 21+

Для семейства графов со знаками с наибольшим собственным значением не превосходящим λ существует конечное семейство запрещённых индуцированных подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \rho^{1/2} + \rho^{-1/2} \approx 2.01980 < \lambda^*$, где ρ — единственный действительный корень уравнения $x^3 = x + 1$.

Основные результаты

Цзян, АП' 21+

Для семейства графов со знаками с наибольшим собственным значением не превосходящим λ существует конечное семейство запрещённых индуцированных подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \rho^{1/2} + \rho^{-1/2} \approx 2.01980 < \lambda^*$, где ρ — единственный действительный корень уравнения $x^3 = x + 1$.

Цзян, АП' 21+

Для семейства графов с наименьшим собственным значением не меньше $-\lambda$ существует конечное семейство запрещённых индуцированных подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \rho^{1/2} + \rho^{-1/2} \approx 2.01980 < \lambda^*$, где ρ — единственный действительный корень уравнения $x^3 = x + 1$.

Основные результаты

Цзян, АП' 21+

Для семейства графов со знаками с наибольшим собственным значением не превосходящим λ существует конечное семейство запрещённых индуцированных подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \rho^{1/2} + \rho^{-1/2} \approx 2.01980 < \lambda^*$, где ρ — единственный действительный корень уравнения $x^3 = x + 1$.

Цзян, АП' 21+

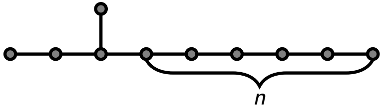
Для семейства графов с наименьшим собственным значением не меньше $-\lambda$ существует конечное семейство запрещённых индуцированных подграфов тогда и только тогда, когда $\lambda < \lambda' = \rho^{1/2} + \rho^{-1/2} \approx 2.01980 < \lambda^*$, где ρ — единственный действительный корень уравнения $x^3 = x + 1$.

Любопытное следствие

Цзян, АП' 21+

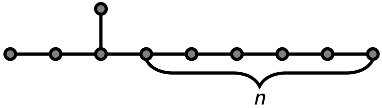
Для любого $\lambda < \lambda^*$ существует n такое, что если целочисленная матрица A, у которой на диагонале стоят 0, имеет собственное значение меньше $-\lambda$, то у неё есть главный минор ранга не больше n, у которого собственное значение меньше $-\lambda$. То же самое не верно для $\lambda \geq \lambda^*$.

Самый сложный случай

$E_{2,n} =$ 

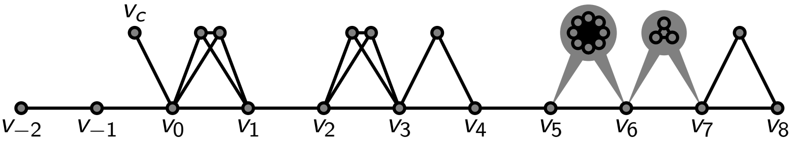
$$\lim_{n\to\infty} \lambda^1(E_{2,n}) = \lambda^* \iff \lim_{n\to\infty} \lambda_1(E_{2,n}) = -\lambda^*.$$

Самый сложный случай

$E_{2,n} =$ 

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^1(E_{2,n}) = \lambda^* \iff \lim_{n\to\infty} \lambda_1(E_{2,n}) = -\lambda^*.$$

Самым сложным было доказать, что множество значений наименьших собственных значений графов всюду плотно между $-\lambda'$ и $-\lambda^*$. Для этого использовалась следующее семейство графов.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!