

# Конструктивные оценки хроматических чисел сфер

Неопрятная А.М.  
*anna.neo01@mail.ru*

Кавказский математический центр  
Адыгейского государственного университета

Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии:  
исследования и преподавание

Сочи  
17 декабря 2021 г.

- 1 Введение
- 2 Построение 5-хроматических графов
- 3 Вложения 4-хроматических графов с нечетным обхватом 5
- 4 Многогранники Ловаса
- 5 Заключение

## Хроматическое число графа

$\chi(G)$  – минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины графа  $G$  так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета.

## Задача Нельсона – Эрдёша – Хадвигера

Требуется найти минимальное число цветов, в которые можно покрасить  $\mathbb{R}^n$  так, чтобы расстояние между точками одного цвета не равнялось единице.

## Хроматическое число сферы

Аналогично,  $\chi(S^2(r)) = \min\{k : S^2(r) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k, \bar{x}, \bar{y} \in V_i \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\| \neq 1\}$ , в предположении, что расстояние между точками сферы индуцировано евклидовой метрикой  $\mathbb{R}^3$ .

## Известные результаты<sup>123</sup>

$$r < \frac{1}{2} : \chi(S^2(r)) = 1$$

$$\chi(S^2(\frac{1}{2})) = 2$$

$$r > \frac{1}{2} : \chi(S^2(r)) \geq 3, \quad , r > \frac{1}{2} : \chi(S^2(r)) \geq 4 \text{ (на рецензировании)}$$

$$r \leq 0.563... \quad \chi(S^2(r)) \leq 4; \quad \chi(S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})) = 4$$

$$r \geq \frac{\sqrt{3}}{3} : \chi(S^2(r)) \geq 4$$

$$\forall r : \chi(S^2(r)) \leq 15$$

$$r \geq 12.44 : \chi(S^2(r)) \leq 7$$

<sup>1</sup>Simmons G. J. The chromatic number of the sphere //Journal of the Australian Mathematical Society. – 1976. – Т. 21. – №. 4. – С. 473-480.

<sup>2</sup>Godsil C. D., Zaks J. Colouring the sphere arXiv:1201.0486

<sup>3</sup>Sirgedas, T. 2021. The surface of a sufficiently large sphere has chromatic number at most 7.

## Дистанционное вложение

Назовем  $\phi_r : V \rightarrow S^2(r)$  дистанционным вложением графа  $G$  в сферу  $S^2(r)$ , если отображение  $\phi$  инъективно, и для каждого ребра  $(u, v) \in E$  выполнено  $\|\phi_r(u) - \phi_r(v)\| = 1$ .

Пусть  $R(G) \subset \mathbb{R}_+$  — множество всех радиусов сферы, для которых существует дистанционное вложение  $G$  в сферу  $S^2(r)$ .

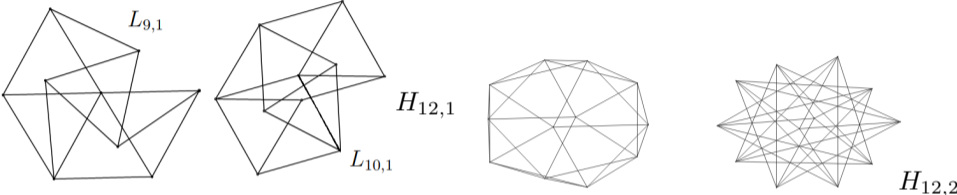
## Алгоритм

- Пусть  $G = (V, E)$  — простой граф,  $|V| = n$ .
- Инициализируем  $(n \times 3)$  матрицу  $X$  случайными значениями, распределенными равномерно на  $[-r, r]$ . Пусть  $x_i$  — строка с номером  $i$ , координаты вершины  $v_i$ .
- Найдем минимум функции

$$F(X) = \sum_{1 \leq i \leq n} (\|x_i\|^2 - r^2)^2 + \sum_{(i,j) \in E} (\|x_i - x_j\|^2 - 1)^2.$$

- Верно ли, что для найденного локального минимума  $F(X^*) = 0$ ? Если да, то  $X^*$  определяет вложение графа в сферу (возможно, с совпадением вершин, т.е. гомоморфизм).

# Совмещение дистанционных графов по ребрам



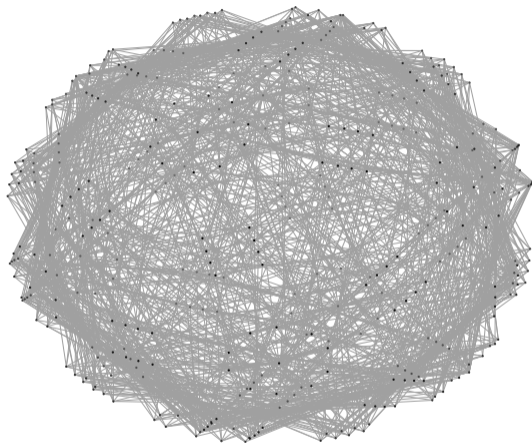


Рис. 1: 5-хроматический дистанционный граф на 372 вершинах, описанная сфера икосаэдра с единичным ребром, подграф  $L_{9,1} \circ H_{12,1}$ ,  $r_1 = 0.951\dots$

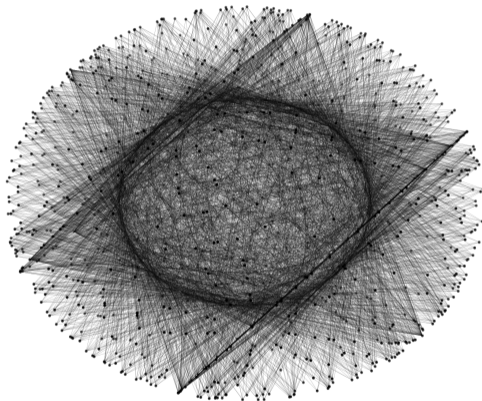


Рис. 2: 5-хроматический дистанционный граф на 972 вершинах, описанная сфера большого икосаэдра с единичным ребром, подграф  $L_{10,1} \circ H_{12,2}$ ,  $r_2 = 0.587\dots$

## Утверждение

Хроматическое число сферы  $\chi(S^2(r))$  зависит от радиуса сферы не монотонно.

В самом деле,

$$\chi(S^2(r_1)) \geq 5,$$

$$\chi(S^2(r_2)) \geq 5,$$

$$\chi(S^2(\sqrt{2}/2)) = 4.$$

## Нечётный обхват графа

Нечетным обхватом  $g_{\text{odd}}(G)$  графа  $G$  называется длина кратчайшего нечётного цикла в этом графе. Если граф двудольный, полагаем  $g_{\text{odd}}(G) = \infty$ .

## Утверждение

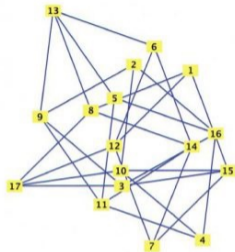
Справедлива оценка

$$\inf R(G) \geq \frac{1}{2 \cos(\pi/2g_{\text{odd}}(G))}.$$

$g_{odd}(G)$	$r_{min}$
3	0,57735
5	0,52573
7	0,51286
9	0,50771
11	0,50514
13	0,50367

Таблица 1: Нижние оценки для радиуса сферы

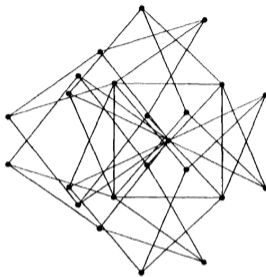
# 4-хроматический граф без треугольников на 17 вершинах <sup>1</sup>



$$\begin{cases} \|x_i\|^2 - r^2 = 0; \\ \|x_i - x_j\|^2 - 1 = 0; & (x_i, x_j) \in E(G); \\ x_{1,2} = x_{1,3} = x_{8,3} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

<sup>1</sup>Exoo G., Ismailescu D. Small order triangle-free 4-chromatic unit distance graphs  
//Geombinatorics. – 2016. – Т. 26. – С. 49-64.

# 4-хроматический граф без треугольников на 23 вершинах <sup>1</sup>



Граф Хохберга–О’Доннелла получен присоединением 4 циклов  $C_5$  к квадрату и отождествлением центральной вершины. Если не выполнять отождествление, имеем 4-хроматический граф без треугольников на 24 вершинах, для которого существуют невырожденные вложения в сферу при  $r < \sqrt{3}/3$ .

<sup>1</sup>Soifer A. The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators. – Springer Science and Business Media, 2008.

## Теорема о сходимости модифицированного метода Ньютона<sup>1</sup>

Пусть отображение  $F$  сильно дифференцируемо в некотором шаре  $B(x_0, r)$  с центром  $x_0$  и радиусом  $r$ , а производная  $F'(x)$  удовлетворяет в этом шаре условию Липшица:

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Пусть  $[F'(x_0)]^{-1}$  существует и

$$M = \|[F'(x_0)]^{-1}\|, k = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, h = MkL.$$

Тогда если  $h < 1/4$ , то в шаре  $\|x - x_0\| \leq kt_0$ , где  $t_0$  - меньший корень уравнения  $ht^2 - t + 1 = 0$ , уравнение  $F(x) = 0$  имеет единственное решение  $x^*$  и последовательность  $x_n$ , определяемая рекуррентной формулой  $x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1}(F(x_n))$ , сходится к этому решению.

---

<sup>1</sup>Колмогоров А., Фомин С. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - с.526

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x) = 2 \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_{17} \\ x_1 - x_j & 0 & \dots & x_j - x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & x_k - x_{17} & \dots & 0 & x_{17} - x_k \\ e_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ e_3 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & e_3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

## Малые изменения радиуса сферы

Предположим, что  $x^*(r_0)$  — решение (1) при  $r = r_0$ . Используем это значение в качестве начального приближения при  $r = r_0 + \delta$ . Тогда  $F_{r_0+\delta}(x_0) = u \cdot (2r_0\delta + \delta^2)$ , где  $u = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$  (единицы стоят на первых 17 позициях). Вычислим  $c = \frac{1}{4ML}$  и найдем верхнюю границу  $\delta$ , при котором выполнено

$$\|[F'(x_0)]^{-1}u \cdot (2r_0\delta + \delta^2)\| < c.$$

В силу линейности нормы

$$2r_0\delta + \delta^2 < \frac{c}{\|[F'(x_0)]^{-1}u\|}.$$

Отсюда

$$\delta < \sqrt{r_0^2 + \frac{c}{\|[F'(x_0)]^{-1}u\|}} - r_0.$$

При  $r_0 = 0.56$  имеем  $\delta < \delta_{max} \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$ .

## Система дифференциальных уравнений

Пусть  $x = x(t)$  задает некоторое гладкое движение вершин графа в  $\mathbb{R}^3$ .  
Непрерывное вложение дистанционного графа в сферу (параметризованное решение (1)) может быть получено путем численного решения системы

$$\frac{d}{dt}F(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x}F(x) \right) \dot{x} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)^T.$$

## Существование вложения на интервалах

После объединения интервалов, найденных из значений решения данной системы окончательно получаем

### Утверждение

Вложение графа Ехоо-Ismailescu в сферу  $S^2(r)$  как графа единичных расстояний существует при  $0.5522 \leq r < \sqrt{3}/3$ .

### Утверждение

Вложение графа Хохберга–О'Доннелла в сферу  $S^2(r)$  как графа единичных расстояний существует при  $0.5406 \leq r < \sqrt{3}/3$ .

### Теорема

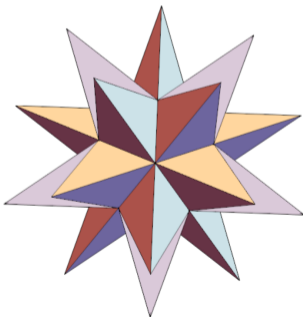
$$\chi(S^2(r)) = 4, \quad 0.5406 \leq r \leq \sqrt{3 - \sqrt{3}}/2 = 0.563\dots$$

## Утверждение

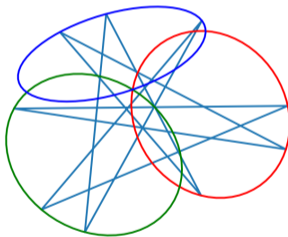
При радиусе  $r = \frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.535$  существует 4-хроматический дистанционный граф на 200 вершинах

## Следствие

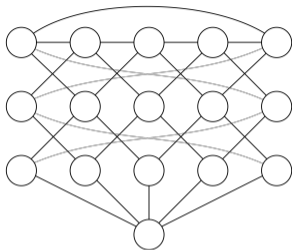
Хроматическое число сферы  $\chi(S^2(r)) = 4$



Объединение трёх окружностей единичного радиуса на сфере с центрами в одноцветных вершинах содержит цикл длины 9. Координаты вершин являются корнями многочленов с целыми коэффициентами степени 8.



# Обобщенный мычельскиан графа



## Утверждение

Обозначим обобщённый мычельскиан графа  $G$  (конус над графом)  $\Delta_s$ . Тогда  $\chi(\Delta_s(C_l)) = 4$ , если  $l$  нечетно. Если  $s \geq \frac{l-1}{2}$ , то нечетный обхват  $\Delta_s(C_l)$  равен  $l$ .

## Утверждение

Если  $\forall e \in E(G) \quad \chi(G - \{e\}) < \chi(G)$  ( $G$  минимален) и  $\chi(\Delta_s(G)) = \chi(G) + 1$ , то  $\Delta_s(G)$  также минимален.

## Теорема Борсука

Для произвольного покрытия сферы замкнутыми множествами  $S^{n-1} \subseteq M_1 \cup \dots \cup M_n$  хотя бы одно из множеств  $M_i$  содержит пару противоположных точек.

## Утверждение

$$\chi(\Delta_s(C_{2k+1})) = 4.$$

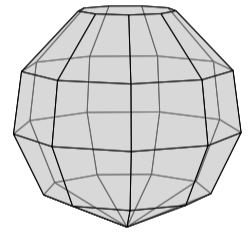
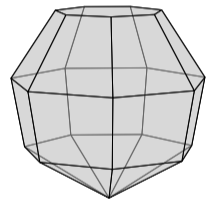
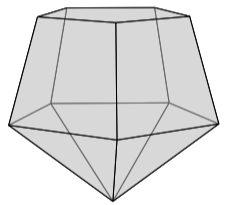
Из наличия 3-раскраски выводится существование раскраски сферы, противоречащей теореме Борсука (Л. Ловас).

## Теорема (L.Lovasz,1983)

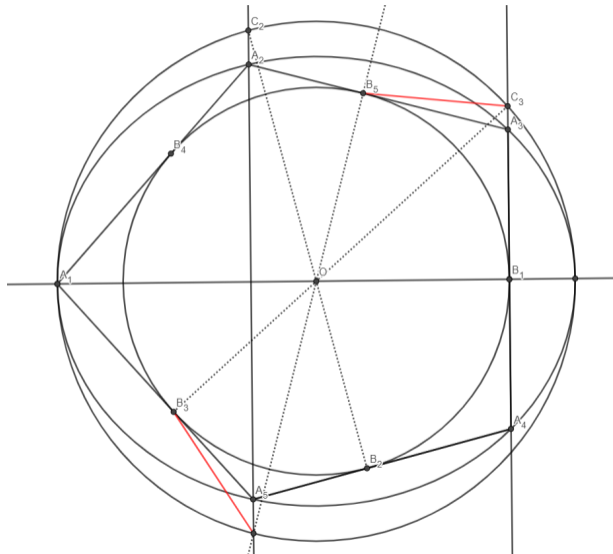
Для нечетного  $l \geq 3$  в  $\mathbb{R}^n$  существует многогранник  $P_{n,l} = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{t_n}\}$ ,  $x_i \in S^{n-1}$  со следующими свойствами:

- $\text{diam } P_{n,l} = 1$ ;
- $P_{n,l}$  описан около сферы радиуса  $\rho_{n,l}$ ;
- граф диаметров  $P_{n,l}$  представляет собой обобщенный мычельскиан  $G_{n,l} = \Delta_s(\Delta_s(\dots \Delta_s(C_l) \dots))$ ,  $\chi(G_n) = n + 1$ ;  $s = (l - 1)/2$ , нечетный обхват  $G_{n,l}$  равен  $l$ .

# Многогранники Ловаса $P_{3,2}$ , $P_{3,3}$ , $P_{3,4}$



# Нечетный цикл для “меридиана”



### Следствие (L.Lovasz,1983)

В каждой размерности существует последовательность радиусов  $r_{n,j}$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} r_{n,j} = 1/2$ , для которых  $\chi(S^{n-1}(r_{n,j})) = n + 1$ .

### Гипотеза

Пусть  $G_{3,j}$  — граф диаметров многогранника Ловаса, вписанного в сферу радиуса  $r_{3,j}$ ;  $G'_{3,j} = G_{3,j} - \{e\}$ . Тогда существует непрерывное вложение  $G'_{3,j}$  в сферу  $S^2(r)$  в некоторой окрестности  $r_{3,j}$ .

### Утверждение

Гипотеза верна для  $r_{3,1} = 0.61237\dots$ ,  $r_{3,2} = 0.54004\dots$ ,  $r_{3,3} = 0.52025\dots$ ,  $r_{3,4} = 0.5122\dots$

### Следствие

Для некоторого  $\varepsilon > 0$  при  $r \in (r_{3,j} - \varepsilon, r_{3,j} + \varepsilon)$  выполнено  $\chi(S^2(r)) = 4$ , и можно явно построить 4-хроматический дистанционный граф.

### Утверждение

При  $l \rightarrow \infty$  имеем  $\lim \frac{\#E(G_{n,l})}{\#V(G_{n,l})} = 2^{n-2}$ .

Это означает, что при  $n \geq 2$  после удаления ребра система, задающая непрерывное вложение  $G_{n,l}$ , будет переопределенной.

- Построены дистанционные вложения 4-хроматических дистанционных графов в окрестностях значений  $r_{3,2} = 0.54004\dots$ ,  $r_{3,3} = 0.52025\dots$ ,  $r_{3,4} = 0.5122\dots$
- Найдено точное значение хроматического числа сферы для этих диапазонов радиусов.
- Установлено, что аналогичная техника не может быть применена при  $n \geq 4$ .

- Улучшение оценки Ловаса: верно ли, что  $\chi(S^{n-1}(r)) = n + 1$  при  $r \rightarrow \frac{1}{2}$ ?
- Существуют ли другие примеры дистанционных графов с хроматическим числом  $n + 2$ , вложенных в сферу  $S^{n-1}(r)$  или пространство Лобачевского  $H^{n-1}$ ?
- Можно ли таким способом построить контрпример к гипотезе Борсука в размерности 4, 5, 6, ...?

- ▶ Soifer A. The mathematical coloring book: Mathematics of coloring and the colorful life of its creators. – Springer Science and Business Media, 2008.
- ▶ Simmons G. J. The chromatic number of the sphere //Journal of the Australian Mathematical Society. – 1976. – Т. 21. – №. 4. – С. 473-480.
- ▶ de Grey A. D. N. J. The chromatic number of the plane is at least 5 //arXiv preprint arXiv:1804.02385. – 2018.
- ▶ Exoo G., Ismailescu D. Small order triangle-free 4-chromatic unit distance graphs //Geombinatorics. – 2016. – Т. 26. – С. 49-64.
- ▶ Voronov, V., Neopryatnaya, A., Dergachev, E. (2021). Constructing 5-chromatic unit distance graphs embedded in the euclidean plane and two-dimensional spheres. arXiv preprint arXiv:2106.11824.

Спасибо за внимание!