Быстрые алгоритмы справедливого дележа

А. Гребенников, К. Исаева, А.В. Малютин, М. Михайлов, О.Р. Мусин

Справедливый делёж

"The main unresolved issue in this section is the general question of finding bounded finite algorithms for envy-free division for any number of players. This is a well-known problem, and any algorithm for envy-free division, even for special small cases and even using continuous moving knife methods, would be of interest."

Jack Robertson & **William Webb**, *Cake-Cutting Algorithms. Be Fair If You Can*. CRC Press, 1998

Справедливый делёж ренты:

- d человек делят d комнат в квартире, арендная плата за которую составляет S у.е.
- Для каждого вектора цен $(f_1, f_2, \ldots, f_d)$ и распределения по комнатам $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ каждый человек знает, устраивает ли его такой делёж или нет.
- Делёж называется справедливым, если он устраивает всех

Справедливый делёж ренты

- Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ симплекс Δ

$$\Delta = \{\, (f_1, \dots, f_d) \mid f_i \geqslant 0, \sum f_i = S \,\}$$

Это $d-1$-мерный симплекс — конфигурационное пространство.

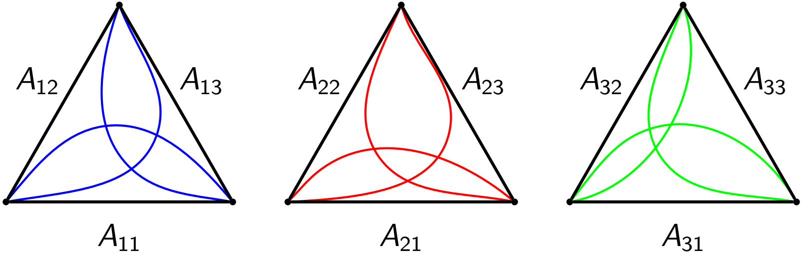
- Зададим множества предпочтений i-го участника:

$$A_{ij} = \{\, (f_1, \dots, f_d) \in \Delta \mid \text{ Игрока } i \text{ устраивает комната } j \,\}$$

- Игрока всегда устраивает комната по нулевой цене.
- Решение это точка $x \in \Delta$ такая, что существует перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_d$:

$$\forall i \in [d] : x \in A_{i\sigma(i)}$$

Справедливый делёж ренты



Существование точки справедливого дележа

Теорема

Точка справедливого дележа ренты существует

Доказательство.

Soon™ □

Постановка задачи. Мотивировка

- Ищем точку справедливого дележа с точностью до ε, но множества A_{ij} не известны.
- Стремимся задать суммарно как можно меньше вопросов.

Постановка задачи. Мотивировка

- Ищем точку справедливого дележа с точностью до ε, но множества A_{ij} не известны.
- Стремимся задать суммарно как можно меньше вопросов.

Что значит с точностью до ε?

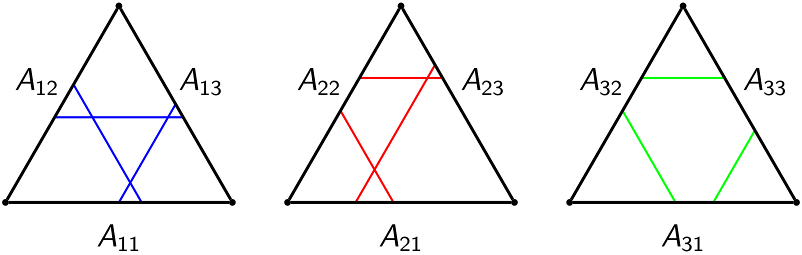
Постановка задачи. Мотивировка

- Ищем точку справедливого дележа с точностью до ε, но множества A_{ij} не известны.
- Стремимся задать суммарно как можно меньше вопросов.

Что значит с точностью до ε?Это значит что нас устроит точка лежащая в ε окрестности пересечения $A_{i\sigma(i)}$ для некоторой $\sigma \in \mathfrak{S}_d$.

Случай полупространств

В простейшем случае множества A_{ij} — полупространства, границы которых параллельны граням коразмерности 1.

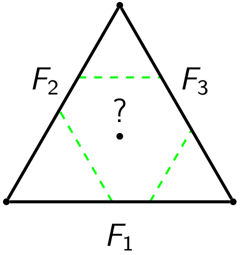


Случай полупространств: идея решения

- Будем итерироваться по игрокам.
- Возьмем точку c — центр симплекса Δ и будем спрашивать текущего игрока, и спрашивать какую комнату он предпочтет.
- Если он предпочитает комнату j, то возьмем грань F_j и проведем через точку c гиперплоскость параллельную F_j. Получим какой-то новый симплекс, который мы обозначим за Δ.
- За $O(\log n)$ шагов восстановим множества предпочтений для текущего игрока.

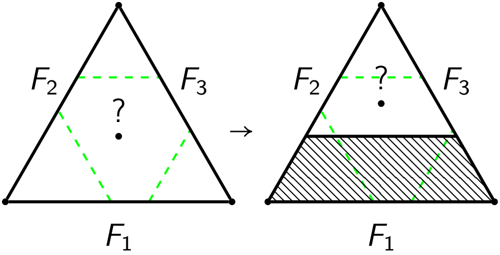
Случай полупространств: идея решения

Иллюстрация к алгоритму:



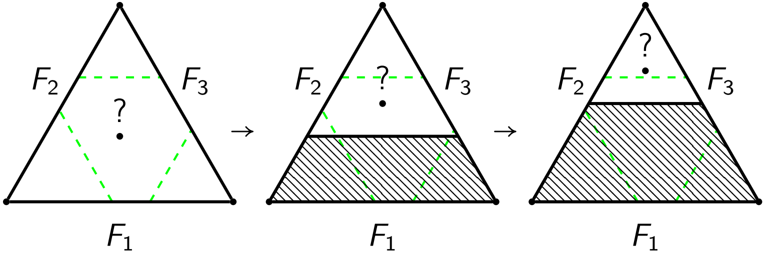
Случай полупространств: идея решения

Иллюстрация к алгоритму:



Случай полупространств: идея решения

Иллюстрация к алгоритму:



Лемма о предпочтениях

Лемма

Пусть

$$I_i = \bigcap_{j=1}^{d} A_{ij}^{\varepsilon}$$

Тогда среди любых точек $x_i \in I_i$, *где* $1 \leqslant i \leqslant d-1$, *есть точка справедливого дележа.*

Лемма о предпочтениях

Лемма

Пусть

$$I_i = \bigcap_{j=1}^{d} A_{ij}^{\varepsilon}$$

Тогда среди любых точек $x_i \in I_i$, где $1 \leqslant i \leqslant d-1$, есть точка справедливого дележа.

Лемма

На множестве $[d-1]$ заданы d линейных порядков $\{\leqslant_j\}_{1 \leqslant j \leqslant d}$. Тогда существует индекс i_0 такой, что для любого j_0 существует биекция $\pi: [d-1] \to [d] \setminus j_0$ такая, что для любого $i \in [d-1]$ верно:

$$i_0 \leqslant_{\pi(i)} i$$

Лемма о предпочтениях

Есть такой i_0, что если мы выкинем любой порядок, то для каждого i найдется уникальный порядок $\pi(i)$, в котором он больше i_0.

	1	2	3	4	5	6
$\leqslant_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_3$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_4$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_5$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_6$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_7$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Лемма о предпочтениях

Есть такой i_0, что если мы выкинем любой порядок, то для каждого i найдется уникальный порядок $\pi(i)$, в котором он больше i_0.

	1	2	3	4	5	6
$\leqslant_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_3$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\cancel{\leqslant_4}$	$\cancel{\cdot}$	$\cancel{\cdot}$	$\cancel{\dots}$	$\cancel{\dots}$	$\cancel{\dots}$	$\cancel{\dots}$
$\leqslant_5$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_6$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_7$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Лемма о предпочтениях

Есть такой i_0, что если мы выкинем любой порядок, то для каждого i найдется уникальный порядок $\pi(i)$, в котором он больше i_0.

	1	2	3	4	5	6
$\leqslant_1$	$\cdot$	i_0	3	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	i_0	$\dots$	5
$\leqslant_3$	i_0	$\cdot$	1	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_4$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_5$	$\cdot$	i_0	$\dots$	6	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_6$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	i_0	4
$\leqslant_7$	i_0	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Лемма о предпочтениях

	1	2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$d-1$
$\leqslant_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_d$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Лемма о предпочтениях

	1	2	…	…	…	$d-1$
$\leqslant_1$	$\cdot$	$\cancel{k}$	…	…	…	…
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	…	$\cancel{k}$	…	…
…	$\cdot$	$\cdot$	$\cancel{k}$	…	…	…
$\leqslant_{l_1}$	$\cdot$	$\cdot$	…	…	…	$\cancel{k}$
…	$\cdot$	$\cdot$	…	…	$\cancel{k}$	…
$\leqslant_{l_2}$	$\cdot$	$\cdot$	…	…	…	$\cancel{k}$
…	$\cdot$	$\cdot$	$\cancel{k}$	…	…	…
$\leqslant_d$	$\cdot$	$\cdot$	…	$\cancel{k}$	…	…

Лемма о предпочтениях

	1	2	$\dots$	$\hat{k}$	$\dots$	$d-1$
$\leqslant_1$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_2$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_{l_2}$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\leqslant_d$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Лемма о предпочтениях

Получили индекс i_0. Покажем, что он — искомый.

Если $j_0 \neq l_1$, то по выбору i_0 существует биекция

$$\pi' \colon [d-1] \setminus k \to [d] \setminus \{\, l_1, j_0 \,\}$$

с желаемым свойством. Определим искомую биекцию как

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi'(i) & \text{when } i \neq k, \\ l_1 & \text{when } i = k. \end{cases}$$

Если $j_0 = l_1$. то по выбору i_0 существует биекция

$$\pi' \colon [d-1] \setminus k \to [d] \setminus \{ l_1, l_2 \}$$

с желаемым свойством. Определим искомую биекцию как

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi'(i) & \text{when } i \neq k, \\ l_2 & \text{when } i = k. \end{cases}$$

Лемма о предпочтениях

Доказательство.

Для каждой грани F_j, сопутствующие множества A_{ij} образуют линейные порядки на множестве $[d]$ отношением включения. Зная точки $x_1, \ldots, x_{d-1}$ мы можем задать схожие порядки на множестве $[d-1]$ сравнивая барицентрические координаты точек. По доказанной лемме, мы можем выбрать некоторый i_0 так, чтобы в точке x_{i_0} не зависимо от того, какую комнату предпочтёт d-ый участник, существовало справедливое распределение оставшихся комнат между оставшимся участниками. $\square$

Лемма о предпочтениях

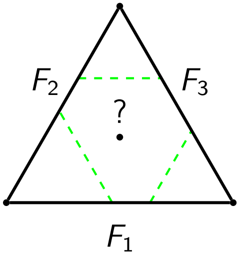
Доказательство.

Для каждой грани F_j, сопутствующие множества A_{ij} образуют линейные порядки на множестве $[d]$ отношением включения. Зная точки $x_1, \dots, x_{d-1}$ мы можем задать схожие порядки на множестве $[d-1]$ сравнивая барицентрические координаты точек. По доказанной лемме, мы можем выбрать некоторый i_0 так, чтобы в точке x_{i_0} не зависимо от того, какую комнату предпочтёт d-ый участник, существовало справедливое распределение оставшихся комнат между оставшимся участниками. $\square$

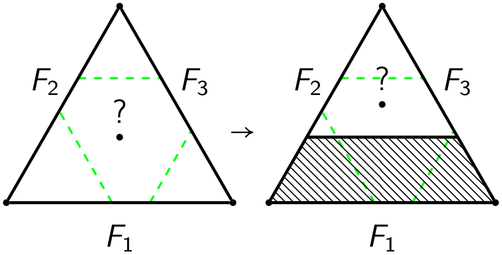
Используется только то, что для всякого j и всяких i_1, i_2 верно то что $A_{i_1 j} \subset A_{i_2 j}$ или наоборот.

Таким образом искомая лемма верна для более широкого класса конфигураций.

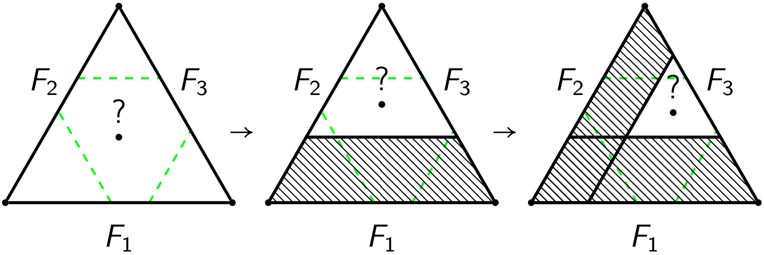
Случай полупространств: докрутка



Случай полупространств: докрутка



Случай полупространств: докрутка



Случай выпуклых множеств

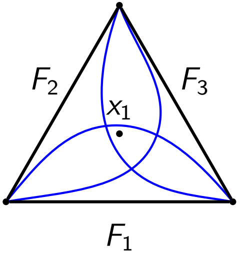
Идея алгоритма когда множества A_{ij} выпуклые, похожа на идею алгоритма в случае полуплоскостей. Ключевая идея — в лемме:

Лемма

Пусть известны точки $x_i \in I_i$, где $1 \leqslant i \leqslant d$. Тогда можно предъявить точку $x(x_1, \ldots, x_d)$, которая будет являть точкой справедливого дележа.

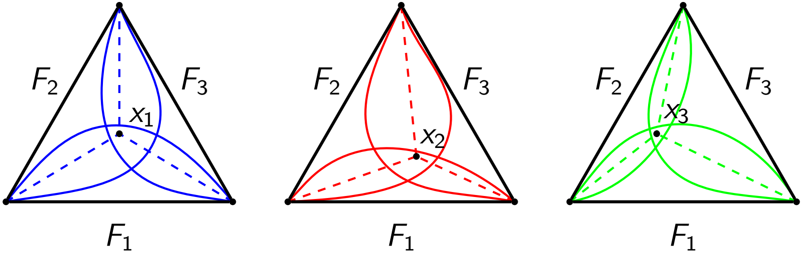
Случай выпуклый множеств

Иллюстрация к лемме:



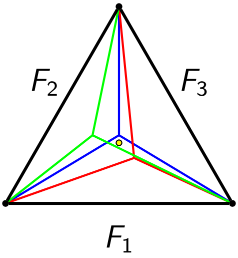
Случай выпуклых множеств

Иллюстрация к лемме:



Случай выпуклых множеств

Мы получили некоторую новую конфигурацию, всякая точка справедлива дележа в которой, будет точкой справедливого дележа и в исходном случае.



Случай выпуклых множеств

Как искать x_i?

Случай выпуклых множеств

Как искать x_i?

Для $d = 3$ подойдет двойной бинпоиск. Нас интересует точка, в которой границы множеств A_{i1} и A_{i2} расходятся:

Случай выпуклых множеств

Как искать x_i?

Для $d = 3$ подойдет двойной бинпоиск. Нас интересует точка, в которой границы множеств A_{i1} и A_{i2} расходятся: