Упаковки, разбиения и вершинные покрытия относительно путей.

Мокеев Дмитрий Борисович

Нижегородский государственный университет
им.Н.И.Лобачевского
Высшая школа экономики в Нижнем Новгороде

Сириус
17 декабря 2021

Вершинные покрытия в графах

Классическая задача

Вершинное покрытие графа $G = (V, E)$ – это подмножество C множества его вершин V, пересекающееся с каждым ребром графа G.
Задача о вершинном покрытии – найти вершинное покрытие графа G наименьшего размера $\beta(G)$.

Обобщённый вариант задачи

Для графа $G = (V, E)$ и «шаблонного» семейства графов $\mathcal{X}$, а вершинным покрытием графа G относительно $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$-покрытием) называется подмножество C множества его вершин V, пересекающееся с каждым $\mathcal{X}$-подграфом графа G.
Задача об $\mathcal{X}$-покрытии $\mathcal{X}$-COVER – найти $\mathcal{X}$-покрытие графа G наименьшего размера $\beta_{\mathcal{X}}(G)$.

Паросочетания графов

Паросочетанием в графе G называется множество ребер, попарно не имеющих общих вершин.
Задача о паросочетании – найти паросочетание графа G наибольшей мощности $\mu(G)$.

Совершенным паросочетанием или 1-фактором называется паросочетание, в котором участвуют все вершины графа. То есть любая вершина графа инцидентна ровно одному ребру, входящему в паросочетание.
Задача о совершенном паросочетании – в графе G на $2s$ вершинах выяснить, существует ли совершенное паросочетание (мощности s).

Любое совершенное паросочетание является наибольшим и максимальным. Совершенное паросочетание является также рёберным покрытием минимального размера.
Обе задачи полиномиально разрешимы на графах общего вида.

Упаковки и разбиения

$\mathcal{X}$– семейство графов

$\mathcal{X}$-упаковки

$\mathcal{X}$-упаковкой в графе G называется множество $\mathcal{X}$-подграфов, попарно не имеющих общих вершин.
Задача об $\mathcal{X}$-упаковке $\mathcal{X}$-PACKING – найти $\mathcal{X}$-упаковку графа G наибольшей мощности $\mu_{\mathcal{X}}(G)$.

$\mathcal{X}$-разбиения

Если все графы из $\mathcal{X}$ содержат k вершин, то $\mathcal{X}$-разбиением в графе G называется $\mathcal{X}$-упаковка, в которой участвуют все вершины графа. То есть любая вершина графа входит ровно в один $\mathcal{X}$-подграф.
Задача об $\mathcal{X}$-разбиении – в графе G на ks вершинах выяснить, существует ли $\mathcal{X}$-разбиение (мощности s).

P_k-покрытия графов

P_k – простой путь (цепь) на k вершинах.

Для графа $G = (V, E)$ и натурального числа k, P_k-покрытием графа G называется подмножество C множества его вершин V пересекающееся с каждым k-вершинным путём графа G.
Задача о P_k-покрытии P_k-COVER – найти P_k-покрытие графа G наименьшего размера $\beta_{P_k}(G) = \psi_k(G)$.

P_2-покрытие $=$ вершинное покрытие.

P_k-упаковки и P_k-разбиения графов

P_k – простой путь (цепь) на k вершинах.

Для графа $G = (V, E)$ и натурального числа k, P_k-упаковкой графа G называется множество его k-вершинных путей, попарно не имеющих общих вершин.
Задача о P_k-упаковке P_k-PACKING – найти P_k-упаковку графа G наибольшего размера $\mu_{P_k}(G)$.

P_2-упаковка $=$ паросочетание.

Задача о разбиении вершин графа на k-пути P_k-PARTITION:
G – граф с числом вершин $|G|$ кратным k.
Требуется в графе G найти $|G|/k$ путей размера k, попарно не содержащих общих вершин или показать, что такого разбиения не существует.

P_2-разбиение $=$ совершенное паросочетание.

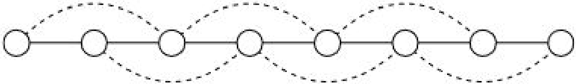
Порождённые или непорождённые подграфы

Различают «порождённые» и «непорождённые» P_k-упаковки, P_k-разбиения и P_k-покрытия. В первом случае рассматриваются только порождённые подграфы, изоморфные P_k, во втором – любые простые k-пути графа.

Приложение 1. Протоколы сетевой безопасности

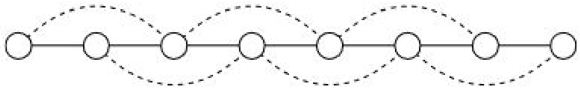
Схема Canvas (H. Vogt, 2004)

- Перед развёртыванием сенсорной сети выполняется предварительное распределение ключей.
  В конце этого этапа произвольно выбранная пара узлов (с высокой вероятностью) способна установить общий секретный ключ.
- Сразу после развёртывания каждый узел устанавливает отдельный секретный общий ключ с каждым из своих непосредственных (1-hop) и косвенных (2-hop) соседей.
  В конце этого этапа (если сеть подключена) между любой парой узлов сети есть хотя бы один путь следующего типа:



Приложение 1. Протоколы сетевой безопасности

- Рабочая фаза сенсорной сети: узлы обмениваются сообщениями друг с другом, «аутентифицируя» их с помощью соседних ключей по пути передачи.



Злоумышленник может манипулировать сообщениями в этой цепи, если контролирует две смежные вершины.

Приложение 1. Протоколы сетевой безопасности

Обобщённый протокол Canvas (M. Novotný, 2010)

Введена k-обобщенная версия протокола Canvas для некоторого параметра $k \geq 2$ и построена его формальная модель. Она включает в себя модель топологии сети, каналов связи, захваченных узлов и возможностей злоумышленника.

Доказано, что предложенная k-обобщенная схема Canvas при наличии активного противника обеспечивает целостность данных сообщений при условии, что на каждом пути длины $k-1$ (то есть порядка k) графа связи сенсорной сети существует по крайней мере один *честный* узел.

Приложение 2. Контроль дорожного движения

Установка камер на дорогах (J. Tu, W. Zhou, 2011)

Увеличение числа автотранспорта приводит ко все большему числу дорожно-транспортных происшествий, потому есть необходимость установки камер. При этом установка камер на каждом перекрёстке слишком затратна и потому не эффективна.
Поэтому есть смысл устанавливать камеры на определенных перекрестках, при этом нужно гарантировать, что водитель, проехав k перекрестков, встретится по крайней мере с одной камерой. В то же время, мы должны гарантировать минимальные затраты на установку. Таким образом, эта практическая задача превращается в задачу о P_k-COVER.

Ещё приложения

A.K. Hope, 1970

- Проектирование печатных электронных плат (P_k-PACKING и P_k-PARTITION).

S. Funke, A. Nusser, S. Storandt, 2016

- Ключевые точки в планировании маршрутов;
- Визуализация маршрута;
- Сжатие графа при планировании маршрута (P_k-COVER).

Трудоёмкость задач P_k-COVER

Общий случай

Для каждого $k \geq 2$ задача P_k-COVER NP-полна (R.Karp, 1972, B.Brešar, F.Kardoš, J.Katrenič, G.Semanišin, 2011).

P_3-COVER

Алгоритм с трудоёмкостью $O^*(1.3659^n)$ (M. Xiao, S. Kou, 2015).
FPT-алгоритмы с параметрической сложностью $O(1.8172^s n^{O(1)})$ (J.Katrenič, 2016) и $O^*(1.713^s)$ (D. Tsur 2019);

$k \geq 4$

FPT-алгоритм решения задачи P_4-COVER с параметрической сложностью $O^*(3^s)$ (J. Tu 2015);
FPT-алгоритм решения задачи P_5-COVER с параметрической сложностью $O(4^s n^{O(1)})$ (R. Červeny, O. Suchy, 2019)
Алгоритм решения задачи P_k-COVER, где $k \geq 4$, с трудоёмкостью $O(1.5171^n)$ (F.Kardoš, J.Katrenič, 2011);

Трудоёмкость задач P_k-PACKING

P_2-PACKING

Задача P_2-PACKING полиномиально разрешима в общем случае (J. Edmonds, 1965).

P_k-PACKING, где $k \geq 3$

Задача P_k-PACKING NP-полна при $k \geq 3$ (P.Hell, D.G.Kirkpatrick, 1978).

FPT-алгоритм решения задачи P_3-PACKING с параметрической сложностью $O^*(2.448^3 s)$ (H. Fernau, D. Raible, 2009).

Трудоёмкость задач P_k-PARTITION

Известно, что задача о P_k-разбиении является NP-полной при $k \geq 3$

- для графов общего вида (Hell P., Kirkpatrick D.G., 1983),
- для двудольных плоских графов (Dyer M.E., Frieze A.M., 1985),
- для двудольных субкубических графов (Monnot J., Toulouse S., 2007).

Точные полиномиальные решения

- P_2-COVER полиномиально разрешима на **двудольных** графах.
- P_3-COVER полиномиально разрешима на кактусах. (J. Tu, 2017)
- P_3-PACKING полиномиально разрешима на некоторых субкубических графах.
  (Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P., 2008)
- P_3-PARTITION полиномиально разрешима на расщепляемых графах. (R. van Bevern etc., 2017; О.И.Дугинов, 2019)
- Для любого $k \geq 2$ P_k-COVER и P_k-PACKING полиномиально разрешимы в классе лесов. (Masuyama S., Ibaraki T., 1991)
- Для любого $k \geq 2$ P_k-PARTITION полиномиально разрешима в классе пороговых графов. (О.И.Дугинов, Д.Б.М., 2021)
- **Кёниговы графы** (Д.Б.М. с 2011)

Пара двойственных задач ЦЛП

G – граф;
B – Матрица инцидентности графа G;
x – характеристический вектор подмножества рёбер графа G;
u – характеристический вектор подмножества вершин;
$\mathbb{1}$ – столбец, состоящий из единиц.

Паросочетание

$$Bx \leq \mathbb{1}$$

$$\mu(G) = \max_{Bx \leq \mathbb{1}} \mathbb{1}^T x$$

Вершинное покрытие

$$B^T u \geq \mathbb{1}$$

$$\beta(G) = \min_{B^T u \geq \mathbb{1}} \mathbb{1}^T u$$

Из теоремы двойственности G, $\mu(G) \leq \beta(G)$.
Из теоремы Кёнига G – двудольный $\rightarrow$ разрыв двойственности равен 0.

Пара двойственных задач ЦЛП

G – граф;
B – Матрица инцидентности P_k-структуры графа G;
x – характеристический вектор подмножества k-путей графа G;
u – характеристический вектор подмножества вершин;
$\mathbb{1}$ – столбец, состоящий из единиц.

P_k-PACKING

$$B\,x \leq \mathbb{1}$$

$$\mu_{P_k}(G) = \max_{Bx \leq \mathbb{1}} \mathbb{1}^T x$$

P_k-COVER

$$B^T u \geq \mathbb{1}$$

$$\beta_{P_k}(G) = \min_{B^T u \geq \mathbb{1}} \mathbb{1}^T u$$

Из теоремы двойственности G, $\mu_{P_k}(G) \leq \beta_{P_k}(G)$.
В каких случаях разрыв двойственности равен 0?

Кёниговы графы относительно $\mathcal{X}$

Определение

Пусть $\mathcal{X}$ – класс графов Граф G называется Кёниговым относительно $\mathcal{X}$, если для любого его порождённого подграфа H выполняется равенство $\mu_{\mathcal{X}}(H) = \beta_{\mathcal{X}}(H)$.

$\mathcal{K}(\mathcal{X})$ – класс кёниговых графов отностиельно $\mathcal{X}$.

$\mathcal{K}(\mathcal{X})$ – наследственный класс при любом $\mathcal{X}$

Замечание

В определении кёниговых графов в упаковках и покрытиях относительно $\mathcal{X}$ учитываются только порождднные $\mathcal{X}$-подграфы. Для «непорождённого случая» P_k используются обозначения $\mu_{\langle P_k \rangle}(G)$, $\beta_{\langle P_K \rangle}(G)$ и $\mathcal{K}(\langle P_k \rangle)$ соответственно.

$\mu_{P_k}(G) = \beta_{P_k}(G)$ и $\mu_{\langle P_k \rangle}(G) = \beta_{\langle P_k \rangle}(G)$

- $k = 2$ – свойство Кёнига-Эгервари (Mishra S. etc., 2011–2017).

Наследственные классы

- $k = 3$ – $\mathcal{K}(P_3)$ и $\mathcal{K}(\langle P_3 \rangle)$ (В. Е. Алексеев, Д. Б. М., 2012–2016);
- $k = 4$ – $\mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$ (Д. С. Малышев, Д. Б. М., 2019);
- $k = 5$ – $\mathcal{K}(\langle P_5 \rangle)$ (Д. С. Малышев, Д. Б. М., 2020);
- $k = 2s + 1$ – семейство подклассов классов кёниговых графов относительно $\langle P_{2s+1} \rangle$ (Д. С. Малышев, Д. Б. М., 2021).

Другие результаты

- $k = 4$ – описаны два подкласса класса $\mathcal{K}(P_4)$ (Д. Б. М., 2014–2017);
- $k \geq 5$ – описано семейство подклассов класса $\mathcal{K}(P_k)$ (Д. Б. М., 2016).

Спасибо за внимание!