Концентрационные неравенства в экстремальной теории множеств

Сергей Киселёв

Московский физико-технический институт

Совместная работа с Андреем Купавским

Сириус
17 декабря 2021

Обозначения

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$

Обозначения

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] \colon |F| = k\}.$

Обозначения

$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k} = \{F \subset [n] \colon |F| = k\}.$

$\mathcal{F}$ пересекающееся, если для любых $F, F' \in \mathcal{F} \colon F \cap F' \neq \varnothing$

Известные результаты

Какой максимальный размер пересекающегося семейства?

Известные результаты

Какой максимальный размер пересекающегося семейства?

Теорема (Эрдёш–Ко–Радо, 1961)

Пусть $n \geqslant 2k$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ пересекающееся. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

Пример: $\mathcal{F} = \{F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F\}$

Известные результаты

Какой максимальный размер пересекающегося семейства?

Теорема (Эрдёш–Ко–Радо, 1961)

Пусть $n \geqslant 2k$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ пересекающееся. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

Пример: $\mathcal{F} = \{F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F\}$

Теорема (Хилтон–Милнер, 1967)

Пусть $n > 2k$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ пересекающееся и не подмножество звезды. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1 \leqslant k\binom{n-2}{k-2}.$$

Гипотеза Эрдёша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдёша о паросочетаниях, 1965

Пусть $n \geqslant sk$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ не содержит s попарно не пересекающихся множеств. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\},$$

где

$$\mathcal{A} := \left\{A \in \binom{[n]}{k} : A \cap [s-1] \neq \varnothing\right\}, \quad \mathcal{B} := \binom{[sk-1]}{k}.$$

Гипотеза Эрдёша о паросочетаниях

Гипотеза Эрдёша о паросочетаниях, 1965

Пусть $n \geqslant sk$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ не содержит s попарно не пересекающихся множеств. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leqslant \max\{|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}|\},$$

где

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \binom{[n]}{k} : A \cap [s-1] \neq \varnothing \right\}, \quad \mathcal{B} := \binom{[sk-1]}{k}.$$

Франкл, 2013: Верна для $n \geqslant 2sk$.
Франкл, Купавский, 2018: Верна для $n \geqslant \frac{5}{3}sk$ и $s \geqslant s_0$.

Предыдущие результаты: Эрдёш и Галлай (1959); Эрдёш (1965); Боллобаш, Дайкин и Эрдёш (1976); Франкл и Фюреди (1987); Хуан, Ло и Судаков (2012); Лючак и Мичковска (2014), Франкл (2017).

Концентрация

Обозначим $\mathcal{F}(\overline{F}) := \{H \in \binom{[n]}{k} \colon H \cap F = \varnothing\}$.

Концентрация

Обозначим $\mathcal{F}(\overline{F}) := \{H \in \binom{[n]}{k} \colon H \cap F = \varnothing\}$.

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$ и F распределено равномерно на $\binom{[n]}{k}$. Тогда $\mathsf{E}\mathcal{F}(\overline{F}) = \alpha\binom{n-k}{k}$

Концентрация

Обозначим $\mathcal{F}(\overline{F}) := \{H \in \binom{[n]}{k} \colon H \cap F = \varnothing\}$.

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$ и F распределено равномерно на $\binom{[n]}{k}$. Тогда $\mathsf{E}\mathcal{F}(\overline{F}) = \alpha\binom{n-k}{k}$

Теорема (Киселёв–Купавский–Франкл, 2021)

$$\mathsf{P}\left(|\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}\right) \leqslant C' \exp(-C''\varepsilon^2 n/k)$$

Концентрация

Обозначим $\mathcal{F}(\overline{F}) := \{H \in \binom{[n]}{k} \colon H \cap F = \varnothing\}$.

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$ и F распределено равномерно на $\binom{[n]}{k}$. Тогда $\mathsf{E}\mathcal{F}(\overline{F}) = \alpha\binom{n-k}{k}$

Теорема (Киселёв–Купавский–Франкл, 2021)

$$\mathsf{P}\left(|\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}\right) \leqslant C' \exp(-C''\varepsilon^2 n/k)$$

Теорема (Киселёв–Купавский–Франкл, 2021)

Пусть $n \geqslant 50k \ln k$, $k \geqslant 50$ и $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ пересекающееся. Тогда

$$|\{F \setminus F' \colon F, F' \in \mathcal{F}\}| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$$

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Собственные значения $KG_{n,k}$ равны $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$, $i = 0, \ldots, k$. В частности, $KG_{n,k}$ — спектральный $\left(\binom{n}{k}, \binom{n-k}{k}, k/(n-k)\right)$-экспандер.

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Собственные значения $KG_{n,k}$ равны $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$, $i = 0, \dots, k$. В частности, $KG_{n,k}$ — спектральный $\left(\binom{n}{k}, \binom{n-k}{k}, k/(n-k)\right)$-экспандер.

Обозначим $\mathcal{A}_\varepsilon := \{F : |\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}\}$.

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Собственные значения $KG_{n,k}$ равны $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$, $i = 0, \ldots, k$. В частности, $KG_{n,k}$ — спектральный $\left(\binom{n}{k}, \binom{n-k}{k}, k/(n-k)\right)$-экспандер.

Обозначим $\mathcal{A}_\varepsilon := \{F \colon |\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}\}$. Тогда $e(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{F}) < |\mathcal{A}_\varepsilon|(\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}$.

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Собственные значения $KG_{n,k}$ равны $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$, $i = 0, \ldots, k$. В частности, $KG_{n,k}$ — спектральный $\left(\binom{n}{k}, \binom{n-k}{k}, k/(n-k)\right)$-экспандер.

Обозначим $\mathcal{A}_\varepsilon := \{F : |\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}\}$. Тогда $e(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{F}) < |\mathcal{A}_\varepsilon|(\alpha - \varepsilon)\binom{n-k}{k}$.

Expander mixing lemma: $e(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{F}) > |\mathcal{A}_\varepsilon|\alpha\binom{n-k}{k} - \binom{n-k-1}{k-1}\sqrt{|\mathcal{A}_\varepsilon||\mathcal{F}|}$.

Доказательство слабой оценки

Рассмотрим кнезеровский граф $KG_{n,k}$: вершины соответствуют k-множествам из $\binom{[n]}{k}$ и соединены ребром, если не пересекаются.

Собственные значения $KG_{n,k}$ равны $(-1)^i\binom{n-k-i}{k-i}$, $i = 0, \ldots, k$. В частности, $KG_{n,k}$ — спектральный $\left(\binom{n}{k}, \binom{n-k}{k}, k/(n-k)\right)$-экспандер.

Обозначим $\mathcal{A}_\varepsilon := \{F\colon |\mathcal{F}(\overline{F})| < (\alpha-\varepsilon)\binom{n-k}{k}\}$. Тогда $e(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{F}) < |\mathcal{A}_\varepsilon|(\alpha-\varepsilon)\binom{n-k}{k}$.

Expander mixing lemma: $e(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{F}) > |\mathcal{A}_\varepsilon|\alpha\binom{n-k}{k} - \binom{n-k-1}{k-1}\sqrt{|\mathcal{A}_\varepsilon||\mathcal{F}|}$.

Тогда $|\mathcal{A}_\varepsilon| \leqslant \varepsilon^2 \frac{k^2}{(n-k)^2}\alpha\binom{n}{k}$.

Концентрация для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Концентрация для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Теорема (Купавский 2018, Киселёв–Купавский, 2020)

$$\mathsf{P}\big(\big||\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| - \alpha t\big| > \varepsilon\alpha t\big) \leqslant C' \exp(-C''\varepsilon^2\alpha t)$$

Доказательство концентрации для дополнений

Пусть $(H, M_1, \ldots, M_{t-1})$ распределено равномерно на множестве всех сочетаний.

Доказательство концентрации для дополнений

Пусть $(H, M_1, \ldots, M_{t-1})$ распределено равномерно на множестве всех сочетаний. Обозначим $\mathcal{M}' := (M_1, \ldots, M_{t-1})$ и $\alpha_H := |\mathcal{F}(\overline{H})|/\binom{n-k}{k}$. Тогда

Доказательство концентрации для дополнений

Пусть $(H, M_1, \ldots, M_{t-1})$ распределено равномерно на множестве всех сочетаний. Обозначим $\mathcal{M}' := (M_1, \ldots, M_{t-1})$ и $\alpha_H := |\mathcal{F}(\overline{H})|/\binom{n-k}{k}$. Тогда

$$\mathsf{P}(|\mathcal{F} \cap \mathcal{M}'| < (\alpha - \varepsilon)(t-1)) \leqslant \exp(-\varepsilon^2 \alpha t)$$

Доказательство концентрации для дополнений

Пусть $(H, M_1, \dots, M_{t-1})$ распределено равномерно на множестве всех сочетаний. Обозначим $\mathcal{M}' := (M_1, \dots, M_{t-1})$ и $\alpha_H := |\mathcal{F}(\overline{H})|/\binom{n-k}{k}$. Тогда

$$\mathsf{P}(|\mathcal{F} \cap \mathcal{M}'| < (\alpha - \varepsilon)(t-1)) \leqslant \exp(-\varepsilon^2 \alpha t)$$

С другой стороны, $|\mathcal{F} \cap \mathcal{M}'| = |\mathcal{F}(\overline{H}) \cap \mathcal{M}'|$ и

$$\mathsf{P}(|\mathcal{F}(\overline{H}) \cap \mathcal{M}'| > (\alpha_H + \varepsilon)(t-1)) \leqslant \exp(-\varepsilon_H^2 \alpha t)$$

Доказательство концентрации для дополнений

Пусть $(H, M_1, \dots, M_{t-1})$ распределено равномерно на множестве всех сочетаний. Обозначим $\mathcal{M}' := (M_1, \dots, M_{t-1})$ и $\alpha_H := |\mathcal{F}(\overline{H})|/\binom{n-k}{k}$. Тогда

$$\mathsf{P}(|\mathcal{F} \cap \mathcal{M}'| < (\alpha - \varepsilon)(t-1)) \leqslant \exp(-\varepsilon^2 \alpha t)$$

С другой стороны, $|\mathcal{F} \cap \mathcal{M}'| = |\mathcal{F}(\overline{H}) \cap \mathcal{M}'|$ и

$$\mathsf{P}(|\mathcal{F}(\overline{H}) \cap \mathcal{M}'| > (\alpha_H + \varepsilon)(t-1)) \leqslant \exp(-\varepsilon_H^2 \alpha t)$$

Тогда

$$\mathsf{P}(|(\alpha_H + \varepsilon)(t-1) < (\alpha - \varepsilon)(t-1)) \leqslant 2\exp(-\varepsilon^2 \alpha t)$$

Доказательство концентрации для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Доказательство концентрации для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Положим $\eta := |\mathcal{M} \cap \mathcal{F}|$, $\eta_i := I(M_i \in \mathcal{F})$. Тогда $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_t$.

Доказательство концентрации для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Положим $\eta := |\mathcal{M} \cap \mathcal{F}|$, $\eta_i := I(M_i \in \mathcal{F})$. Тогда $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_t$. Определим мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Заметим, что $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Доказательство концентрации для паросочетаний

Пусть $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$, $\alpha := |\mathcal{F}|/\binom{n}{k}$, $t := \lfloor n/k \rfloor$ и $\mathcal{M} = (M_1, \ldots, M_t)$ распределено равномерно на множестве всех t-сочетаний. Тогда $\mathsf{E}|\mathcal{M} \cap \mathcal{F}| = \alpha t$.

Положим $\eta := |\mathcal{M} \cap \mathcal{F}|$, $\eta_i := I(M_i \in \mathcal{F})$. Тогда $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_t$. Определим мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Заметим, что $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Предположим, что $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$. Тогда можем применить

Неравенство Азумы-Хёфдинга (1963, 1967)

Если $X_0, \ldots, X_t$ мартингал и $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$, то

$$\mathsf{P}\left[|X_t - X_0| \geqslant 2\beta\sqrt{t}\,\right] \leqslant 2\exp(-\beta^2/2).$$

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$.

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

$Y_0 = \mathsf{E}\eta_t = \alpha$ — плотность $\mathcal{F}$.

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

$Y_0 = \mathsf{E}\eta_t = \alpha$ — плотность $\mathcal{F}$.
$Y_1 = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1)$ — случайная величина с двумя значениями:

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

$Y_0 = \mathsf{E}\eta_t = \alpha$ — плотность $\mathcal{F}$.
$Y_1 = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1)$ — случайная величина с двумя значениями:

- $\mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1 = 1) = \dfrac{\mathsf{P}(\eta_1 = 1, \eta_t = 1)}{\mathsf{P}(\eta_1 = 1)} = \dfrac{2e(\mathcal{F})}{\alpha}$,

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

$Y_0 = \mathsf{E}\eta_t = \alpha$ — плотность $\mathcal{F}$.
$Y_1 = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1)$ — случайная величина с двумя значениями:

- $\mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1 = 1) = \dfrac{\mathsf{P}(\eta_1 = 1, \eta_t = 1)}{\mathsf{P}(\eta_1 = 1)} = \dfrac{2e(\mathcal{F})}{\alpha}$,
- $\mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1 = 0) = \dfrac{\alpha - 2e(\mathcal{F})}{1 - \alpha}$.

Доказательство $|X_i - X_{i-1}| \leqslant 2$

Определили мартингал $X_0, \ldots, X_t$, где $X_i = \mathsf{E}(\eta \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Для него $X_0 = \alpha t$, $X_t = \eta$.

Для удобства, определим $Y_i = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1, \ldots, \eta_i)$. Тогда $X_i = \eta_1 + \ldots + \eta_i + (t-i)Y_i$ и нужно доказать $|Y_{i+1} - Y_i| \leqslant \frac{1}{t-i-1}$.

$Y_0 = \mathsf{E}\eta_t = \alpha$ — плотность $\mathcal{F}$.
$Y_1 = \mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1)$ — случайная величина с двумя значениями:

- $\mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1 = 1) = \dfrac{\mathsf{P}(\eta_1 = 1, \eta_t = 1)}{\mathsf{P}(\eta_1 = 1)} = \dfrac{2e(\mathcal{F})}{\alpha}$,
- $\mathsf{E}(\eta_t \mid \eta_1 = 0) = \dfrac{\alpha - 2e(\mathcal{F})}{1 - \alpha}$.

Алон–Чанг: $|2e(\mathcal{F}) - \alpha^2| \leqslant \frac{k}{n-k}\alpha(1-\alpha)$.