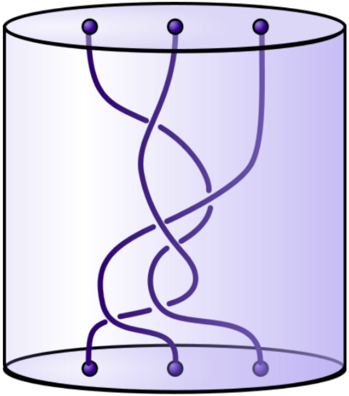
Автоморфизмы групп крашеных кос и гомотопические группы сфер

М. Михайлов, В. Ионин, И. Алексеев

Косы на n нитях

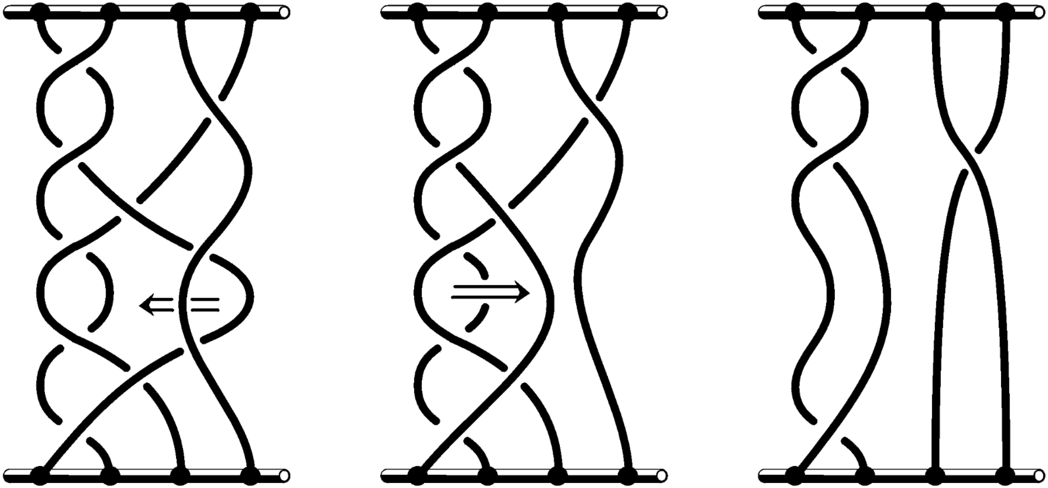
- Выберем в нижнем основании цилиндра n точек $a_1, \dots, a_n$.
- Соединим их нитями с параллельными точками на верхнем основании (не выходя из цилиндра) так, чтобы:
  - нити не имели общих пересечений;
  - нити шли монотонно.

Полученное подмножество пространства называется КОСОЙ с n нитями.



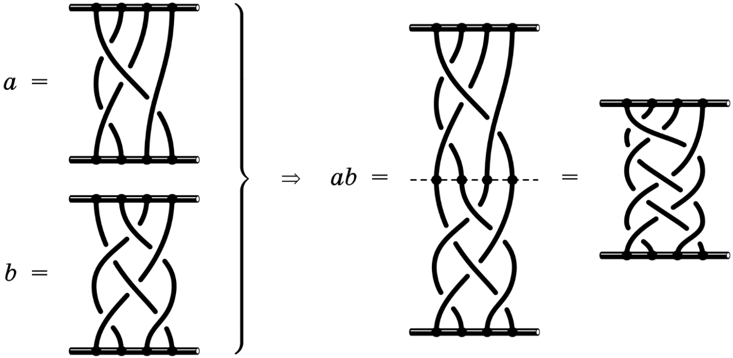
Изотопии кос

Мы рассматриваем косы с точностью до изотопий.



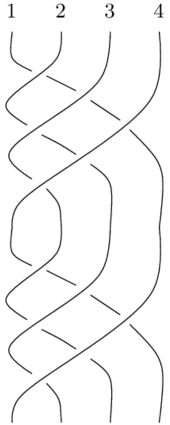
Группа кос на n нитях

Относительно склейки по концам изотопические классы кос на n нитях образуют группу $\mathcal{B}_n$.



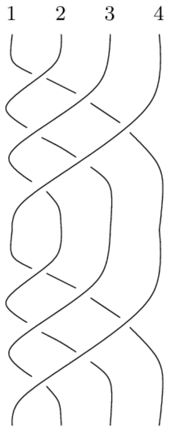
Группа крашеных кос

Коса называется КРАШЕНОЙ, если начало и конец каждой её нити расположены на одном вертикальном уровне.



Группа крашеных кос

Коса называется КРАШЕНОЙ, если начало и конец каждой её нити расположены на одном вертикальном уровне.



Крашеные косы с n нитями образуют подгруппу $\mathcal{P}_n \leq \mathcal{B}_n$.

Автоморфизмы $\mathcal{B}_n$

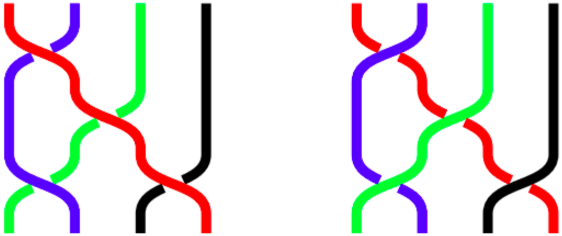
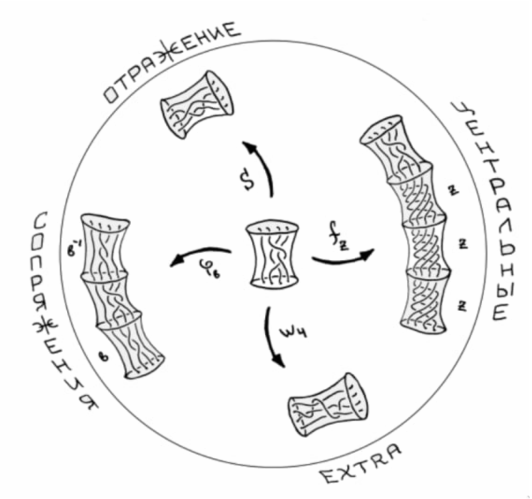


Рис.: χ_n: отражение относительно плоскости проекции

Автоморфизмы $\mathcal{P}_n$

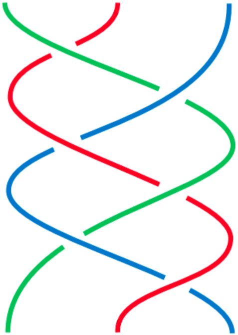
Теорема [BNS18]

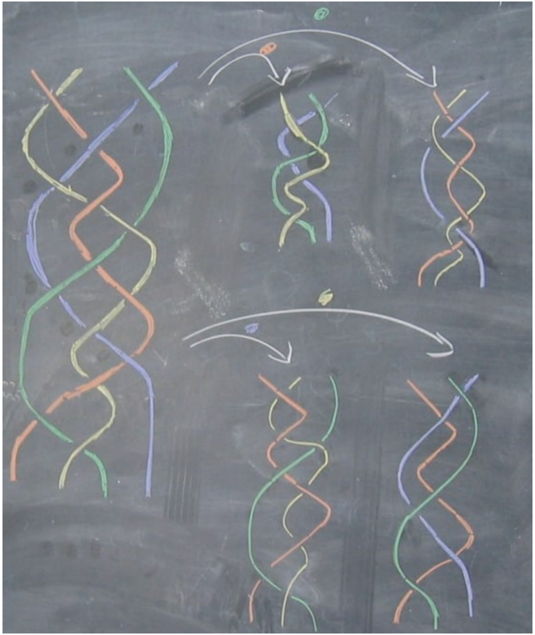
Группа $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n)$ порождается центральными автоморфизмами, автоморфизмами $\mathcal{B}_n$ и одним особым автоморфизмом w_n.



Брунновы косы

Коса называется БРУННОВОЙ, если все косы получающиеся из неё удалением любой струны, тривиальны.





Последовательность групп брунновых кос

$$\cdots \to \mathrm{Brun}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathrm{Brun}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{Brun}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} \mathrm{Brun}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{Brun}_1$$

Теорема [BC+06]

Пусть $\mathrm{Z}_n := \ker(\partial_n)$ - группа супербрунновых кос, $\mathrm{Bd}_n := \mathrm{im}(\partial_{n+1})$ - группа гранично-брунновых кос. Тогда

$$\pi_n(\mathbb{S}^2) \cong \mathrm{Z}_n/\mathrm{Bd}_n.$$

Гомотопические группы сферы

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$\pi_n(\mathbb{S}^2)$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
	6	*7*	*8*	*9*	*10*
	$\mathbb{Z}/12$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/3$	$\mathbb{Z}/15$
	11	*12*	*13*	*14*	*15*
	$\mathbb{Z}/2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/12 \times \mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/84 \times (\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^2$

1. В работе [LW09] Li и Wu построили пример автоморфизма $\theta_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, который переводит брунновы косы в не-брунновы.
2. Там же они показали, что χ_n сохраняет Z_n и Bd_n и индуцирует тривиальный автоморфизм $\pi_n(\mathbb{S}^2)$.

1. В работе [LW09] Li и Wu построили пример автоморфизма $\theta_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, который переводит брунновы косы в не-брунновы.
2. Там же они показали, что χ_n сохраняет Z_n и Bd_n и индуцирует тривиальный автоморфизм $\pi_n(\mathbb{S}^2)$.

Теорема (2021, М. Михайлов, В. Ионин, И. Алексеев)

Для любого $n \geq 3$ подгруппы Z_n и Bd_n являются характеристическими в $\mathcal{P}_n$ и, следовательно, все автоморфизмы $\mathcal{P}_n$ индуцируют автоморфизмы $\pi_n(\mathbb{S}^2)$.

Пусть $r_n : \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n) \to \mathrm{Aut}(\pi_n(\mathbb{S}^2))$ - результирующий гомоморфизм. Мы явно посчитали действие $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}_3)$ на $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ и доказали, что r_3 сюръективен.

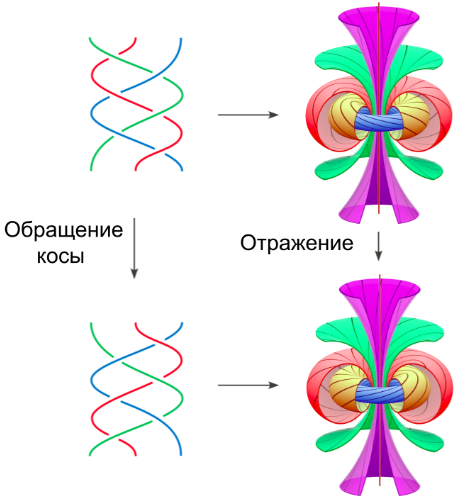


Рис.: Действие группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{P}_3)$ на $\pi_3(\mathbb{S}^2)$

Вопрос

Является ли r_n нетривиальным при всех $n \geq 6$?

Подход к решению

Слово $w(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_t}^{\varepsilon_t}$ в $\mathrm{Free}(x_1, \dots, x_n)$ называется БРУННОВЫМ, если при выкидывании из него любой из образующих, оно тривиализуется:

$$w(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1 \text{ для всех } 1 \leq i \leq n.$$

Теорема (2001, Wu J.)

Рассмотрим группу

$$G(n) = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, x_1 x_2 \dots x_n, \text{ все брунновы слова } w(x_1, \dots, x_n) \rangle.$$

Тогда для $n \geq 3$ группа $\pi_n(\mathbb{S}^2)$ изоморфна центру $G(n)$.

Действие Jie Wu группы $\mathcal{B}_n$ на $\operatorname{Aut}\left(\pi_n(\mathbb{S}^2)\right)$

- Jie Wu рассматривает действие $\mathcal{B}_n$ на $G(n)$, индуцированное представлением Артина $\mathcal{B}_n \to \operatorname{Aut}\left(\operatorname{Free}(x_1, \ldots, x_n)\right)$.
- Так как центр является характеристической подгруппой, действие Jie Wu индуцирует $\mathcal{B}_n \to \operatorname{Aut}\left(Z\left(\operatorname{Free}(x_1, \ldots, x_n)\right)\right) \cong \operatorname{Aut}\left(\pi_n(\mathbb{S}^2)\right)$.

Теорема (2001, Wu. J)

Для $n \geq 4$:

- неподвижные точки действия $\varphi|_{\mathcal{P}_n} : \mathcal{P}_n \to \operatorname{Aut}\left(G(n)\right)$ - это $Z\left(G(n)\right)$;
- неподвижные точки действия $\varphi : \mathcal{B}_n \to \operatorname{Aut}\left(G(n)\right)$ - это $\operatorname{Tor}_2\left(Z\left(G(n)\right)\right)$.

Действие Jie Wu (расшифровка 0 / 2)

Теорема (2001, Wu. J)

Для $n \geq 4$:

- неподвижные точки действия $\varphi|_{\mathcal{P}_n} : \mathcal{P}_n \to \mathrm{Aut}\left(G(n)\right)$ - это $Z\left(G(n)\right)$;
- неподвижные точки действия $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathrm{Aut}\left(G(n)\right)$ - это $\mathrm{Tor}_2\left(Z\left(G(n)\right)\right)$.

Действие Jie Wu (расшифровка 1 / 2)

Теорема (2001, Wu. J)

Для $n \geq 4$:

- действие $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathrm{Aut}\left(Z\left(G(n)\right)\right)$ пропускается через

$$\mathcal{B}_n \to \underbrace{\mathcal{B}_n/\mathcal{P}_n}_{\Sigma_n} \to \mathrm{Aut}\left(Z\left(G(n)\right)\right);$$

- неподвижные точки действия $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathrm{Aut}\left(G(n)\right)$ - это $\mathrm{Tor}_2\left(Z\left(G(n)\right)\right)$.

Действие Jie Wu (расшифровка 2 / 2)

Теорема (2001, Wu. J)

Для $n \geq 4$:

- действие $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathrm{Aut}\left(Z\left(G(n)\right)\right)$ пропускается через Σ_n:

$$\mathcal{B}_n \to \underbrace{\mathcal{B}_n/\mathcal{P}_n}_{\Sigma_n} \to \mathrm{Aut}\left(Z\left(G(n)\right)\right);$$

- действие $\Sigma_n \to \mathrm{Aut}\left(Z\left(G(n)\right)\right)$ пропускается через $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_n \arrow[r, "\texttt{Jie Wu}"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Aut}\left(G(n)\right) = \mathrm{Aut}\left(\pi_n(\mathbb{S}^2)\right) \\
\mathcal{B}_n/\mathcal{P}_n = \Sigma_n \arrow[r, two heads, "\text{знак перестановки}"] & \Sigma_n/[\Sigma_n, \Sigma_n] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[u, "{0 \mapsto \mathrm{id},\ 1 \mapsto (x \mapsto -x)}"']
\end{tikzcd}$$

Можно задать $\Phi : \mathcal{B}_{n+1} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n)$ так, чтобы образ композиции $\mathcal{B}_{n+1} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n) \xrightarrow{r_n} \mathrm{Aut}\left(\pi_n(\mathbb{S}^2)\right)$ совпадал с образом r_n.

Гипотеза

Следующая диаграмма коммутирует:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{n+1} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_n) \arrow[r, "r_n"] & \mathrm{Aut}\left(\pi_n(\mathbb{S}^2)\right) \\
\Sigma_{n+1} \arrow[rr, "\text{знак перестановки}"] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[u, "\text{-//-}"]
\end{tikzcd}
$$

Источники

[BC+06] J. A. Berrick и др. “Braids, configurations and homotopy groups”. В: *J. Amer. Math. Soc.* 19 (2006), 265--326.

[BM+12] V. G. Bardakov и др. “Brunnian braids on surfaces”. В: *Algebraic and Geometric Topology* 12 (2012), 1607--1648.

[BNS18] V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim и M. Singh. “Automorphisms of pure braid groups”. В: *Monatsh. Math.* 187.1 (2018), с. 1-019.

[LW09] J. Li и J. Wu. “Artin braid groups and homotopy groups”. В: *Proc. London Math. Soc.* 99.3 (2009), с. 521-556.