Об оценке числа Борсука в размерности 4

Всеволод Воронов

Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета

Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследования и преподавание

Сочи
17 декабря 2021 г.

Содержание

Проблема Борсука и связанные результаты

Исходная формулировка

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество, $|\Omega| > 1$;

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \cdots \sqcup \Omega_f,$$

причем $\operatorname{diam} \Omega_i < \operatorname{diam} \Omega$. Пусть $f = f(n)$ — минимальное f, для которого такое разбиение существует (число Борсука).

Гипотеза Борсука. Верно ли, что $f(n) = n + 1$?

Известно, что $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $5 \leq f(4) \leq 9$, ...

Частные случаи и контрпримеры

Гипотеза Борсука верна в частных случаях

1. при $n \leq 3$ (K. Borsuk, 1932, J. Perkal, 1947);
2. если тело ограничено гладкой поверхностью (H. Hadwiger, 1946);
3. для тел вращения (B. Dekster, 1995).

Гипотеза Борсука неверна в общей постановке

1. при $n \geq 2015$ (J. Kahn, G. Kalai, 1993);
2. при $n \geq 561$ (A.M Raigorodskii, 1997);
3. при $n \geq 298$ (A. Hinrichs, C. Richter, 2003);
4. при $n \geq 65$ (A. Bondarenko, 2013);
5. при $n \geq 64$ (T. Jenrich, 2013).

Количественные оценки

Определение 1

Пусть
$$\alpha_n = \sup_{\Omega\subset\mathbb{R}^n} \inf \max_{1\le i\le n+1} \operatorname{diam}\Omega_i, \quad \operatorname{diam}\Omega = 1, \quad \Omega = \bigsqcup_{1\le i\le n+1} \Omega_i$$

Известны следующие оценки:
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}} = 0.888... \le \alpha_3 < 0.98.$$

Определение 2

Пусть
$$\alpha_{n,k} = \sup_{\Omega\subset\mathbb{R}^n} \inf \max_{1\le i\le k} \operatorname{diam}\Omega_i, \quad \operatorname{diam}\Omega = 1.$$

Универсальные покрышки

Определение 3

Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ является универсальной покрышкой в $\mathbb{R}^n$, если для любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} \Omega = 1$ существует такое движение φ_Ω, что $\varphi_\Omega(\Omega) \subseteq U$.

Определение 4

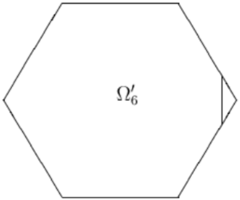
Семейство множеств $U_1, \ldots, U_s$ назовем универсальной покрывающей системой в $\mathbb{R}^n$, если для любого множества Ω, $\operatorname{diam} \Omega = 1$ найдется U_i и такое движение что $\varphi_\Omega(\Omega) \subseteq U_i$.

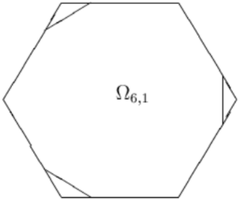
Ряд оценок $\alpha_{2,k}$ был получен В.П. Филимоновым в 2013.

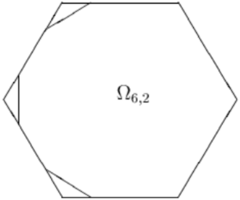
Универсальные покрышки, примеры

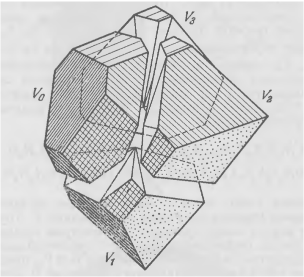
- $n = 1$: отрезок единичной длины;
- $n = 2$: правильный шестиугольник, единичное расстояние между параллельными стороными;
- $n = 2$: усеченный правильный шестиугольник.
- $n = 3$: правильный октаэдр;
- $n = 3$: усеченный правильный октаэдр (D. Gale, B. Grunbaum, A. Heppes, 1950s);
- $n = 3$: усеченный ромбический додекаэдр (В.В. Макеев, 1997);
- $n = 4$: центрально симметричный 14-гранник, описанный около сферы радиуса $1/2$;
- произвольная размерность: единичный куб;
- произвольная размерность: шар радиуса $r_n = \sqrt{\frac{n}{2n+2}}$ (H.W.E. Jung, 1901).

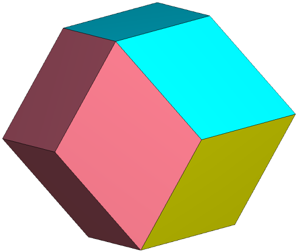
Универсальные покрышки и разбиения











Constrained Optimization

Минимизация максимального диаметра

Пусть $\Omega = \bigcup \Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое покрытие выпуклого многогранника Ω выпуклыми многогранниками Ω_k; $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ — грани Ω размерности $n-1$;
$X = \{x_j\}$ — вершины разбиения;
x_j, $j \in I_k$ — вершины Ω_k.
Пусть $E = \{(p,q) \mid \quad x_p \in \Gamma_q\}$ определяет принадлежность вершин разбиения граням Ω.
Тогда

$$F(X) = \max_k \max_{i,j \in I_k} \|x_i - x_j\| \to \min, \tag{1}$$

$$x_p \in \Gamma_q \quad \forall (p,q) \in E,$$

— задача условной оптимизации с кусочно-гладкой целевой функцией и линейными ограничениями.

Выбор начального приближения

Эвристика

Комбинаторный тип субоптимального разбиения может быть получен как диаграмма Вороного для некоторого множества точек $Y = \{y_j\}$, полученного при решении вспомогательной оптимизационной задачи.

Вспомогательная задача: упаковки шаров

$$\Phi(Y) = \min\left\{\min_{i,j}\gamma_i(y_j), \frac{1}{2}\min_{i<j}\|y_i - y_j\|\right\} \to \max\,. \qquad (2)$$

Основной алгоритм

1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является пересечением полупространств $\gamma_i(x) \leq 0$. Выполняется поиск разбиений Ω на m частей с минимизацией миксимального диаметра.
2. Случайным образом инициализируется множество точек Y_0, $|Y_0| = m$.
3. Вычисляется локальный минимум Y_1 в задаче (2).
4. Вершины разбиения Ω инициализируется диаграммой Вороного $\mathrm{Vor}(\Omega; Y_1)$.
5. Вычисляется локальный минимум X_1 в задаче (1).
6. Если максимальный диаметр найденного разбиения меньше рекордного, то $X^* := X_1$.

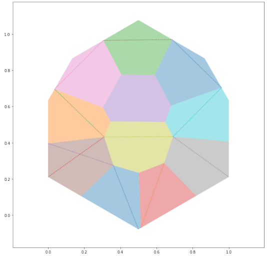
Разбиения плоских множеств

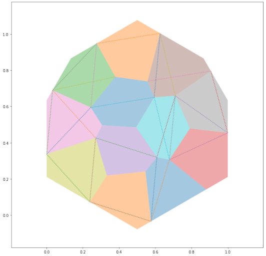
Новые оценки $\alpha_{n,k}$ (совместно с А. Толмачевым и Д. Протасовым)

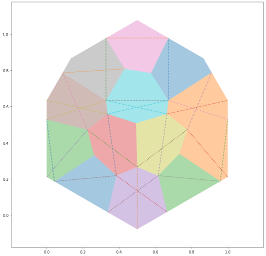
$$\alpha_{2,11} \leq 0.3732\ldots \quad \alpha_{2,12} \leq 0.3532\ldots$$

$$\alpha_{2,13} \leq 0.3419\ldots \quad \alpha_{2,14} \leq 0.3263\ldots$$

$$\alpha_{2,15} \leq 0.3130\ldots \quad \alpha_{2,16} \leq 0.3035\ldots$$





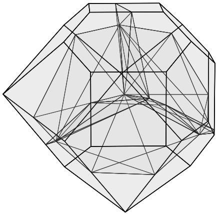


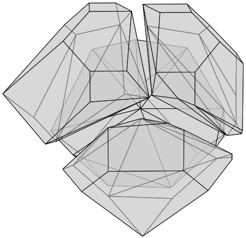
Разбиение усеченного ромбического додекаэдра

Оценки α_3

Известная оценка, полученная для универсальной покрышки В.В. Макеева: $\alpha_3 \leq 0.98$ (Л. Евдокимов, 1997)

Новая оценка: $\alpha_3 \leq 0.9659...$

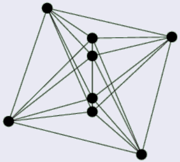




Разбиения четырехмерных многогранников

Усеченный гипероктаэдр (truncated 16-cell)

m	$\max \operatorname{diam} \Omega_i$
5	1.0832
6	1.0827
7	1.0647
8	1.0324
9	1.0061
10	0.9709



24-cell

Существует разбиение 24-cell с диаметром частей 0.978...
К сожалению, но доказано, что 24-cell (или даже усеченный 16-cell) является универсальной покрышкой.

Континуальная универсальная покрывающая система

Параметризованная УПС

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$; $\Omega_\alpha = \bigcap \left(\overline{H}_i(\alpha_i) \cap \underline{H}_i(\alpha_i)\right)$, где H_i — полупространства, и расстояние между параллельными гиперплоскостями, ограничивающими $\overline{H}$ и $\underline{H}$, равно единице.

Если $\{H_\alpha\}$ — УПС, то доказательство существования разбиения может быть сведено к предъявлению конечного множества разбиений, корректных в некоторой окрестности (относительно параметра α) и покрытию множества $\{H_\alpha\}$ такими окрестностями.

Гипотеза

Таким путем можно доказать, что любое множество диаметра 1 в размерности 4 разбивается на 8 частей меньшего диаметра (т.е. оценка Лассака может быть улучшена на 1).

Спасибо за внимание!