Точное значение хроматического числа двумерной сферы при близких к 1/2 значениях радиуса

Всеволод Воронов

Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета

Актуальные тренды 2022 года в комбинаторике и геометрии: исследования и преподавание

Сочи
18 декабря 2021 г.

Определения

Хроматическое число сферы

$\chi(S^2(r)) = \min\{\, k : S^2(r) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k,\ \overline{x}, \overline{y} \in V_i \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\overline{x} - \overline{y}\| \neq 1 \,\}$, в предположении, что расстояние между точками сферы индуцировано евклидовой метрикой $\mathbb{R}^3$.

Теорема (Л. Ловас, 1983)

$\chi(S^{n-1}(r)) \geq n$, $r > 1/2$.

Хроматическое число двумерной сферы

Известные результаты[1,2,3]

$r < \frac{1}{2}: \quad \chi(S^2(r)) = 1$

$\chi(S^2(\frac{1}{2})) = 2; \qquad r > \frac{1}{2}: \quad \chi(S^2(r)) \geq 3$

$r \leq 0.563\ldots \quad \chi(S^2(r)) \leq 4; \quad \chi(S^2(\frac{\sqrt{2}}{2})) = 4$

$r \geq \frac{\sqrt{3}}{3}: \quad \chi(S^2(r)) \geq 4; \qquad r = \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}: \chi(R) \geq 5$

$r \geq 12.44: \quad \chi(S^2(r)) \leq 7$

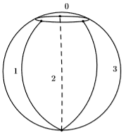
$\forall r: \quad \chi(S^2(r)) \leq 15$

[1] Simmons G. J. The chromatic number of the sphere //Journal of the Australian Mathematical Society. – 1976. – Т. 21. – №. 4. – С. 473-480.

[2] Godsil C. D., Zaks J. Colouring the sphere arXiv:1201.0486

[3] Sirgedas, T. 2021. The surface of a sufficiently large sphere has chromatic number at most 7. arXiv:2107.11900.

Существует ли 3-раскраска?



- Окружность единичного радиуса в индуцированной метрике с центром в x при $r = 1/2 + \varepsilon$ совпадает с окружностью радиуса $\delta = \sqrt{4\varepsilon^2 + 4\varepsilon}$ с центром в $-x$.
- Раскраска карты: если есть точка x, принадлежащая границе областей трех различных цветов, то окрестность $-x$ не удастся правильно раскрасить.
- Раскраска карты: если "пояс" C, состоящий из точек некоторого цвета, пересекается с $-C$, то раскраска не будет правильной.
- Если найдется окружность цветов 1, 2, внутри которой есть точка цвета 3, то (кроме радиусов сферы из счетного множества), цвета 1,2 всюду плотны на окружности, и.т.д.

Схема доказательства

Теорема (Д.Д. Черкашин, В., 2021)

$\forall r > 1/2 \quad \chi(S^2(r)) \geq 4.$

Схема доказательства

- Если есть точка, в произвольно малой окрестности которой найдутся точки всех трех цветов, то каждый цвет всюду плотен на сфере.
- Отсутствие таких точек приводит к противоречию, если рассмотреть некоторую функцию (определяемую далее) и применить теорему Борсука-Улама.
- Если каждый цвет всюду плотен, то можно единичными ребрами прикрепить нечетный цикл к окрестности экватора и произвольно малыми возмущениями добиться того, что концы ребер попадут в точки одного цвета.

Шаг 1

Определение

Пусть C_{red}, C_{blue}, C_{green} — множества точек красного, синего и зеленого цветов, соответственно. Назовем *цветностью* точки число замыканий этих множеств, которым она принадлежит.

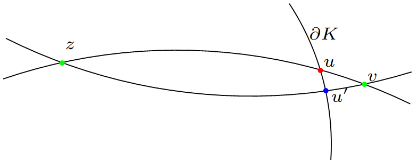
Лемма 1

Если найдется открытый круг радиуса δ, содержащий точки всех трех цветов, то найдется точка цветности 3.

Лемма 2

Если найдется точка цветности 3, то каждое из множеств C_{red}, C_{blue}, C_{green} плотно всюду.

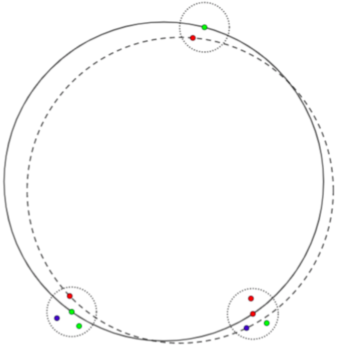
Лемма 1



Лемма 1

Если найдется открытый круг радиуса δ, содержащий точки всех трех цветов, то найдется точка цветности 3.

Лемма 2



Лемма 2

Если найдется точка цветности 3, то каждое из множеств C_{red}, C_{blue}, C_{green} плотно всюду.

Шаг 2

Теорема Борсука-Улама

Пусть $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ — непрерывная функция.
Тогда $\exists x^* : f(x^*) = f(-x^*)$.

Наблюдение

Для произвольной 3-раскраски функция $f(x) = (\mathrm{dist}(x, \overline{C_{red}}), \mathrm{dist}(x, \overline{C_{blue}}))$ непрерывна на $S^2(r)$.
Следовательно, $\exists x^* : f(x^*) = f(-x^*)$.

Шаг 2, продолжение

Возможные случаи

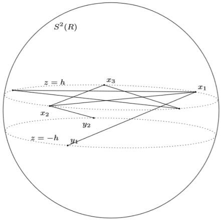
1. $f(x^*) = (0, 0)$;
2. $f(x^*) = (a, b), \quad a \geq b > 0$;
3. $f(x^*) = (a, 0). \quad a > 0$;

Шаг 2, случай 3

Пусть $f(x^*) = (a, 0), \quad a > 0.$

- Если $a \leq \delta$, то круг $B_\delta(-x^*)$ содержит точки трех цветов.
- Если $a > \delta$, то круги $B_\delta(x^*)$, $B_\delta(-x^*)$ раскрашены в два цвета.
- Двудольный граф с вершинами из $B_\delta(x^*) \cup B_\delta(-x^*)$ связен; каждая доля одноцветна. Но это противоречит $f(x^*) = f(-x^*) = (a, 0)$.

Шаг 3



Утверждение

Рассмотрим систему уравнений относительно координат вершин цикла

$$\|x_i\|^2 = r^2; \qquad \|x_i - x_{i+1}\|^2 = 1; \qquad \|x_i - y_i\|^2 = 1.$$

Если найдется вложение в сферу, для которого $(3k \times 3k)$-матрица $\frac{\partial f_i(x)}{\partial y_{js}}$ невырождена, то из теоремы о неявной функции следует, что при произвольном достаточно малом смещении y_i (в частности, по сфере) система разрешима относительно x_i.

3-раскраска $\mathbb{R}P^2$ с двуцветными прямыми

p-adic absolute values and valuations

Пусть $c : \mathbb{R}P^2 \to \{0, 1, 2\}$ — такая раскраска проективной плоскости, что любая линия содержит точки не более чем двух цветов, присутствуют все три цвета, и ни один не сосредоточен на одной линии. Тогда существует такая неархимедова оценка $v(\cdot)$ поля $\mathbb{R}$, что

$$
\begin{aligned}
c(x_1, x_2, x_3) = 0 &\quad\Longleftrightarrow\quad v(x_3) > v(x_1),\ v(x_3) > v(x_2),\\
c(x_1, x_2, x_3) = 1 &\quad\Longleftrightarrow\quad v(x_1) \geq v(x_3),\ v(x_1) > v(x_2),\\
c(x_1, x_2, x_3) = 2 &\quad\Longleftrightarrow\quad v(x_2) \geq v(x_3),\ v(x_2) \geq v(x_1).
\end{aligned}
$$

4-раскраска $\mathbb{R}^2$ и S^2 с трехцветными окружностями

Утверждение[1]

Существует 4-раскраска $\mathbb{R}P^3$, в которой каждый цвет плотен всюду и ни одна плоскость не содержит точек 4 цветов.

Наблюдение

Найдется сфера, на которой каждый из 4 цветов всюду плотен и любая окружность содержит не более 3 цветов. При помощи стереографической проекции данная раскраска может быть перенесена на плоскость.

[1] Hales, A., Straus, E. (1982). Projective colorings. Pacific Journal of Mathematics, 99(1), 31-43.

Открытые вопросы

- Существует ли 4-раскраска $S^2(r)$ при $0.563... = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2} < r < \frac{\sqrt{3}}{3}$?
- Можно ли аналогичным способом улучшить оценку $\chi(S^{n-1}(r)) \geq n$ при $r = 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.
- При каком наименьшем числе цветов существует правильная раскраска сферы $S^2(r)$, в которой каждый цвет плотен всюду? (При $r = \sqrt{2}/2$ существует 9-раскраска.)
- Пусть раскраска не обязательно правильная, но на каждой δ-окружности встречаются не все цвета, и каждый цвет плотен всюду. Существует ли 3-раскраска $S^2(r)$ (или R^2), удовлетворяющая этим условиям?

Спасибо за внимание!