Лемма Шпернера и сбалансированные подмножества многогранников

Блудов Михаил
Научный руководитель: Мусин Олег Рустумович

МФТИ

2021

Построение отображения по раскраске

Пусть у нас есть симплициальный комплекс K. Пусть $Vert(K)$ – множество его вершин. Пусть $\{v_1, \ldots, v_m\} \in \mathbb{R}^d$ – множество точек в d-мерном пространстве. Пусть есть раскраска $L : Vert(K) \to \{1, \ldots, m\}$. Тогда она задает кусочно-линейное отображение $f_L : |K| \to conv(p_1, \ldots, p_m) \subset \mathbb{R}^d$. А именно, если $u \in Vert(K)$, то $f_L(u) = p_k$, где $L(u) = k$. Затем теперь, что каждая точка $v \in |K|$ лежит внутри какого-то единственного симплекса $\sigma = conv(u_0, \ldots, u_k)$, тогда $p = \Sigma\lambda_i u_i$ и определим по линейности $f_L(p) = \Sigma\lambda_i f_L(u_i)$.

Классический случай

Обычно у нас будет какой-то многогранник P со множеством вершин $Vert(P) = (p_1, \ldots, p_m)$ и какая-то триангуляция T на P ($Vert(P) \subset Vert(T)$). Тогда триангулированный многогранник будет симплициальным комплексом и для раскраски вершин триангуляции T также можем определить кусочно-линейное отображение в $P \to conv(v_1, \ldots, v_m)$

Сбалансированные множества

Пусть есть многогранник $\widetilde{P} = conv(v_1, \ldots, v_m) \subset \mathbb{R}^d$. Тогда его центр масс – это среднее взвешенное его вершин, обозначим его за c_v. Набор вершин $V = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ будем называть *сбалансированным*, если $c_v \in conv(V)$. Имеет смысл задача о классификации минимальных сбалансированных наборов вершин. Таким образом, изучая различные наборы точек в пространстве и их сбалансированные подмножества, мы можем получать различные теоремы типа Шпернера и Таккера. Это дает мотивацию к изучению сбалансированных наборов вершин многогранников. Такие задачи могут быть интересны и в приложениях к матэкономике.

Эквивариантные теоремы

Серия теорем возникает, когда многогранник P центрально-симметричный, имеет центрально-симметричную триангуляцию на границе и раскрашен тоже центрально-симметрично.

Теорема

Пусть $\widetilde{P} = \{p_1, -p_1, \dots, p_n, -p_n\}$ – центрально-симметричный набор из $2n$ точек в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbb{B}^d$ – шар размерности d, пусть на нем задана триангуляция T, причем она центрально-симметрична на границе. Тогда для любой центрально-симметричной раскраски $L : Vert(T) \to \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ (т.е. $L(-v) = -L(v)$) найдется симплекс σ в триангуляции T, т.ч. $0 \in f_L(\sigma)$.

Лемма Таккера

Следствием предыдущей теоремы является дискретная версия теоремы Борсука-Улама, или лемма Таккера.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}^d$ – шар размерности d, пусть на нем задана триангуляция T, причем она центрально-симметрична на границе. Тогда для любой центрально-симметричной раскраски $L : Vert(T) \to \{1, -1, 2, -2, \ldots, d, -d\}$ найдется комплементарное ребро в T (ребро, раскрашенное в противоположные цвета).

Лемма Таккера

В случае этой леммы возьмем $\widetilde{P} = \{\pm e_i\}, i = 1, \dots, d$, где $\{e_i\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^d$. Тогда минимальные сбалансированные множества нашего набора – это в точности пары $\{\pm e_i\}$. Отсюда получаем, что должно найтись ребро, раскрашенное в противоположные цвета.

Лемма Ки Фана

Пусть $\mathbb{B}^d$ – шар размерности d, пусть на нем задана триангуляция T, причем она центрально-симметрична на границе. $L : Vert(T) \to \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$ – произвольная центрально-симметричная раскраска. Тогда в T либо найдется комплементарное ребро, либо найдется симплекс триангуляции, имеющий раскраску вида $\{k_0, (-1)k_1, k_2, \dots, (-1)^d k_d\}$, где $1 \le k_0 \le k_2 \le \dots \le k_d \le n$. Такие симплексы назовем d-альтернированными.

Лемма Ки Фана

Пусть $P \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый многогранник на $2n$ центрально-симметричных вершинах $\{p_1, -p1, \ldots, p_n, -p_n\}$. Будем называть его АЦС (алтернированно-центрально-симметричным)(n, d)-многогранником, если минимальные наборы его вершин, содержащие 0 в выпуклой оболочке, есть в точности либо ребра вида $(p_i, -p_i)$, либо d-альтернированные симплексы.

Теорема

Для любых $d \geq 2$ и $n \geq d$ существуют АЦС(n, d)-многогранники.

Шпернеровская раскраска

Раскраску вершин триангуляции T будем называть шпернеровской, если она удовлетворяет следующим условиям: каждая вершина многогранника из $Vert(P)$ раскрашена в свой уникальный цвет из $\{1, \dots, m\}$, и каждая вершина $v \in Vert(T)$ раскрашена произвольно в цвет какой-то из тех вершин P, что образуют минимальную грань, на которой лежит v.

Теорема де Лоеры – Петерсона – Су

Пусть есть точки $conv(v_1, \ldots, v_m) \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый многогранник $\widetilde{P}$. Пусть дан также d-мерный многогранник $P = conv(p_1, \ldots, p_m)$, пусть T его триангуляция. Тогда для любой шпернеровской раскраски L многогранника P в m цветов найдется такой симплекс триангуляции K, что $c_v \in f_L(K)$, т.е. K раскрашен в цвета сбалансированного множества.

Скетч доказательства

Так как раскраска L шпернеровская, то индуцированное ей отображение $f_L : \delta(P) \to \delta(\widetilde{P})$ имеет степень 1, значит у любой точки внутри $\widetilde{P}$ есть прообраз, прообраз точки внутри лежит в каком-то симплексе триангуляции.

Лемма Шпернера

Лемма Шпернера – это комбинаторный аналог теоремы Брауэра о неподвижной точке. Можем привести ее формулировку:

Теорема (Лемма Шпернера)

Пусть дан симплекс Δ^n, пусть он триангулирован, вершины триангуляции раскрашены в $n+1$ цвет, и пусть эта раскраска шпернеровксая. Тогда обязательно найдется симплекс триангуляции, раскрашенный в $n+1$ цвет.

Лемма Шпернера

В случае этой леммы возьмем $P = \widetilde{P} = \Delta^n$. Единственный возможный сбалансированный набор в симплексе – это сам симплекс. Поэтому прообраз центра есть в точности симплекс триангуляции, раскрашенный во все цвета.

Обобщение KKMS

Все приведенные теоремы также допускают множество обобщения и имеют множество приложений в матэкономике (например, в задачах о справедливом дележе). Указанные выше теоремы можно мыслить как следствие следующей теоремы типа *KKMS* .

Теорема

Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ *– множество точек в* $\mathbb{R}^n$*. Пусть* $\mathscr{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ *– покрытие* $\mathbb{B}^k$*, не гомотопное нулю на границе. Тогда найдется* $\mathscr{B} \in I$ *– сбалансированное по отношению к* V *подмножество, т.ч. пересечение* $\bigcap_{i \in \mathscr{B}} F_i \neq \emptyset$

Конкретный пример

Рассмотрим многогранник, образованный серединами ребер симплекса, т.е. пусть $\mathscr{K} = conv(S)$, где $S = \{v \in \mathbb{R}^n | v = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)\}$ – середина какого-то ребра. Сбалансированные наборы – в точности те, выпуклая оболочка которых содержит точку вида $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Любая вершина в нашем случае – какое-то ребро, так как соединяет две вершины. Тогда нашему многограннику естественным образом ассоциирован граф $G(V, E)$, $V = [n]$, каждой вершине, имеющей ненулевые координаты i и j соответствует ребро (i, j).

Конкретный пример

Тогда минимальные сбалансированные подмножества соответствуют покрытиям вершин графа ребрами и циклами (т.е. это граф на n вершинах, компоненты связности которого есть циклы или отдельные ребра). Сбалансированные множества – соответственно те графы, из которых можно выделить ребрено-цикленное покрытие вершин.

Вариант леммы Шпернера

Пусть вершины симплекса раскрашены в пары цветов. Симплекс назовем раскрашенным циклично, если цвета его вершин разбиваются в циклы вида $(a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_k, a_1)$ (причем циклы могут быть длины 1 но не могут быть длины 2).

Теорема

Пусть нам дан выпуклый многогранник на $\binom{n}{2}$ вершинах. Пусть вершины его триангуляции T раскрашены в пары цветов, т.е. задано отображение $f : Vert(T) \to (i, j)$, где $0 \leq i, j \leq n$ и считаем $(i, j) = (j, i)$. И пусть это шпернеровская раскраска.. Тогда найдется симплекс триангуляции, что его вершины раскрашены в разные пары цветов, каждый цвет встречается, и этот симплекс раскрашен циклично.

Дальнейшие планы

Стоит задача классификации сбалансированных наборов следующего многогранника $P \subset \mathbb{R}^{2n}$:
$Vert(P) = \{v \in \mathbb{R}^{2n} | v = (a_1, \ldots, a_{2n}), a_i \in \{0, 1\}, \Sigma a_i = n\}$. Такой многогранник интересен тем, что на нем задана естественным образом инволюция.

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание!