Результаты на основе гипотезы Борсука

Батманов Игорь
ФПМИ МФТИ

Сочи, 2021

Формулировка

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченное множество, $|\Omega| > 1$;

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \ldots \sqcup \Omega_f ,$$

причем $\operatorname{diam} \Omega_i < \operatorname{diam} \Omega$.

Пусть $f = f(n)$ — минимальное f, для которого такое разбиение существует (число Борсука).

Гипотеза Борсука. Верно ли, что $f(n) = n + 1$?

Известно, что $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $5 \leq f(4) \leq 9$

История проблемы

Гипотеза Борсука неверна в общей постановке:

1. при $n \geq 2015$ (J. Kahn, G. Kalai, 1993);
2. при $n \geq 561$ (А.М. Райгородский, 1997);
3. при $n \geq 298$ (A. Hinrichs, C. Richter, 2003);
4. при $n \geq 65$ (А. Бондаренко, 2013);
5. при $n \geq 64$ (T. Jenrich, 2013).

История проблемы

Конструкция Бондаренко (результаты 4 и 5)

На единичной сфере $S_{64} \subset R_{65}$ существует множество из 416 точек, таких что расстояние между любыми двумя из них это или ⅕ или -1/15

Это множество не бьется на 83 подмножества меньшего диаметра. Значит $f(65) \geq 84$.

Для построения такого множества берется *strong regular graph* $\Gamma = G_2(4)$ с параметрами (16, 100, 36, 20). Исследовав этот граф, автор выясняет, что максимальный размер клики в нем 5. Из свойств strong regular graph известно, что его нельзя разбить на меньше, чем v / m частей меньшего диаметра. Т.е. $84 \geq 416/5 > 83$.

Проблема Борсука для подмножеств {0, 1}^n

Пусть $DG(V;k) = (V,E)$, где $V \subset \{0,1\}^n$, $E = \{(u,v) : \|u-v\| = k\}$

Здесь и далее используется норма $\|v\| = \sum_i v_i$

В размерностях при n≤9 задача решена в работах Гольдштейна(МФТИ, 2012) и Ziegler(2001)

Проблема Борсука для подмножеств {0, 1}^n

Если в графе есть ребро, то можно не умаляя общности считать, что это ребро между вершинами 0 и v : $\|v\| = k$

Тогда, если взять пересечение двух шаров, радиуса k, с центрами в 0 и v, и пересечь результат с нашим гиперкубом, то любое подмножество, которое нужно проверить, не умаляя общности лежит там. Соответственно, результат можно отправить на раскраску. Конечно, диаметр полученного множества может быть больше, чем k. Однако, если покрасить удастся, то можно утверждать, что контр-примера при таких входных данных нет.

Это утверждение позволяет при помощи компьютерных вычислений доказать(0,1)-гипотезу Борсука при $n \leq 9$

Алгоритм, проверяющий раскраску: **The Kissat SAT Solver**

Проблема Борсука для подмножеств {0, 1}^n

Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при k=2n+1, n=10

Граф двудольный

Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при k=2, 8; n=10

Тривиально раскрашивается

Проблема Борсука для подмножеств {0, 1}^n

Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при k=4; n=10

Был предложен и реализован подход, при котором использовалось больше, чем одна вершинка v из предыдущего пункта. Более явно:

- Если в графе диаметров есть треугольник, то не умаляя общности, это граф 0, 11 11 00 0000, 11 00 11 0000. Подграф гиперкуба, полученный от пересечения этого гиперкуба, сфер радиуса 4 с центрами в вышеперечисленных вершинах - красится.
- В графе диаметров нет треугольника. Здесь нужно покрасить в 10 цветов множество вершин, находящихся на расстоянии 2 от 0. Красится

Постановка задачи

Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при k=6, n=10

Соображения:

- Можно считать, что в графе бывают только “четные вершины” - “0”, “2”, “4”, “6”; “i” - вершина содержащая ровно “i” единиц в качестве координат
- Можно считать, что 0 и “единичка” = [111 111 000 0] в графе есть

Результаты

Определение: K4, содержащий 0, называется K4 *первого типа*, если каждый бит используется 2 раза или 0 раз. Этот K4 не расширяется до K5. Если K4 не содержит 0, то давайте возьмем xor с любой вершиной из K4, получим K4 содержащий 0.

Пример:

000 000 000 0; 111 111 000 0; 111 000 111 0; 000 111 111 0

Определение: K4, содержащий 0, называется K4 *второго типа*, если это K4 не первого типа. Этот K4 расширяется до K6. Если K4 не содержит 0, то аналогично определению выше.

Пример:

000 000 000 0; 111 111 000 0; 111 000 111 0; 100 101 101 1

Результаты

Утверждение: Все K5, содержащие 0, с точки зрения конструкции одинаковы - найдутся 6 битов, которые встречаются 2 раза, и 4 бита, каждый из которых встречается трижды. Более того, каждый K5 единственным образом дополняется до K6.

Результаты

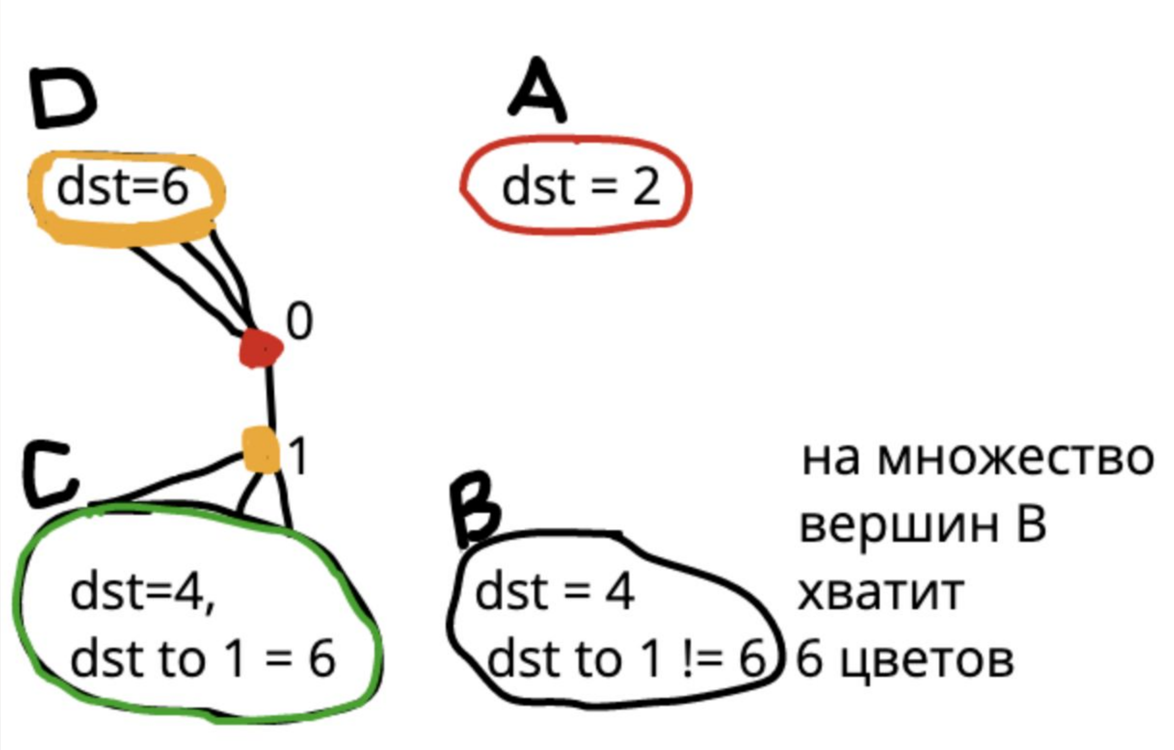
Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при k=6, n=10

Подзадачи

- Граф без треугольников ✅
- Граф без K4 ✅
- В графе есть K4 второго типа и нет K5
- В графе есть K4 первого типа и нет K5 без ребра ✅
- Есть K5, нет K6
- Есть K6 ✅

Результаты

Граф без треугольников



Результаты

Граф с K6

Идея алгоритма: Эксперименты показывают, что достаточно информации о 11 вершинах(т.е. 11 сфер) для того, чтобы покрасить граф с нужными ограничениями в 11 цветов. Давайте просто добьемся таких ограничений!

Алгоритм перебора: Возьмем какой-то K6. Переберем все пятерки вершин, находящихся на расстоянии 6 от 0, покрасим подмножество гиперкуба, которое принадлежит всем 11 сферам.

Они все красятся. Однако может быть такое, что в графе меньше вершин, находящихся на расстоянии 6 от 0(при таком условии на K6).

Тогда давайте дополнительно потребуем, чтобы других вершин на расстоянии 6 в графе не было. Такой граф тоже красится.

Результаты

В графе есть K4 первого типа и нет K5 без ребра

Идея перебора: давайте при каждой попытки добавить ребро проверять, не появилась ли запрещенная конструкция в графе. Список запрещенных конструкций получил в лоб перестановками, что дает лишний overhead при проверках, т.е. одноразовое решение.

Если ребро затрагивает "исходное множество" – K4 первого типа - [0, 111 111 000 0, 111 000 111 0, 000 111 111 0], и при этом возникает запрещенная конструкция, то новая вершина выбрасывается из рассмотрения. Если же оба конца ребра "снаружи", то просто не проводится ребро.

Важно, что запрещенная конструкция идет на основе "фундамента".

Результаты

В графе есть К4 первого типа и нет К5 без ребра

Алгоритм:

Перебираем просто все “четные” вершины графа, пробуем их добавить в граф. После этого пробегаем по всем “внешним ребрам”, пробуем добавить их в граф.

Красится!

Результаты

Граф без K4

Идея алгоритма: Чтобы добиться 11 вершин нужно перебирать все 7ки из какого-то множества, что выставляет нам очень высокий уровень ограничений. Однако есть дополнительная информация - в графе нет K4.

Предыдущая идея перебора не проходит!

Идея перебора: давайте поддерживать информацию о том, какие структуры уже есть в рамках данного перебора: какие вершины, ребра, треугольники точно включены в итог.

Перебираем 6 вершин из тех, что находятся на расстоянии 6; перебираем меньшее число тех, что находятся на расстоянии 6, другие из них удаляем из рассмотрения

Красится!

Что дальше?

В рамках моей задачи

Нужно разобраться с двумя последними случаями:

- В графе есть K4 и нет K5
- В графе есть K5 и нет K6

Для этого можно сделать еще одно улучшение перебора: т.е. разбить множество вершин, которые мы хотим добавить в граф, на несколько блоков, и по определенным правилам переходить между блоками.

Еще можно попробовать поискать конструктивные решения (как в графе без треугольников)

Что дальше?

В соседних задачах

- Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k в n-мерном гиперкубе при $k=2a$, $n\geq 11$
- Задача: Можно ли раскрасить любой граф диаметра k на подмножестве вершин n-мерного гиперкуба, находящихся на расстоянии k от какой-либо вершины гиперкуба, при $k=2a$, $n\geq 11$
- вычислительным путем найти контрпример к борсуку на другой, более богатой решетке, например, на решетке Коркинас — Золотарёва (в размерностях 8 и 24), в размерности $n \leq 63$.

Вопросы?

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ