Текущие задачи

Гномики в тоннеле

Мы играем в следующую игру на графе G для фиксированного числа k. В игре участвуют "игроки" (гномики) и "противник". По 1 гномику сидит в каждой вершине графа (сложной системе комнат, соединчнных прямыми тоннелями).

(i) Противник надевает по шапке одного из k цветов (возможно, повторяющихся), на голову каждому игроку.

(ii) Каждый игрок видит цвета шапок своих соседей по графу, но не собственный.

(iii) Все игроки одновременно пытаются угадать цвет своей шапки в соответствии с некоторой стратегией, которую они выработали заранее.

(iv) Если хотя бы один игрок угадал, то игроки победили. Если нет, то победил противник.

Шапочное число $\mathrm{HN}(G)$ графа G — это наибольшее k, для которого у игроков есть стратегия, в которой они гарантированно побеждают (для любого набора цветов шапок, который выбрал противник). Есть довольно много интересных вопросов, которые мы можем спросить про это число:

arXiv:1812.09752. , arXiv:1905.04108.

Один из них: верно ли, что существует функция $f(d)$, что $\mathrm{HN}(G) \le f(d)$ для любого d-вырожденного графа G? Если заменить d-вырожденность на условие на макс. степень, то это верно по локальной лемме Ловаса.

Известно, что существует d-вырожденный граф с $\mathrm{HN}(G) \ge 2^{d-1}$. В данный момент мы хотим оценить $\mathrm{HN}(G)$ для следующего d-вырожденного графа:

Рассотрим следующий двудольный граф. Левая доля состоит из n вершин. Для каждого множества A из d вершин в левой доле мы добавляем в правую долю множество вершин N_A достаточно большого размера и проводим все рчбра между A и N_A Всего вершин в правой доле будет $\binom{n}{d} \cdot |N_A|$ Каждая вершина в правой доле имеет степень d (поскольку лежит в N_A для некоторого A и соединена только с соответствующими вершинами A).

Гномики и монетки

Два игрока играют в следующую игру: каждый игрок бросает монетку бесконечное число раз, а затем называет число x_i (результатов бросков другого игрока он при этом не видит). Если на позиции x_1 второго игрока и на позиции x_2 первого игрока выпала решка, то игроки выигрывают. Какая максимально возможная вероятность выигрыша при правильной стратегии?

Есть простая стратегия (называть координату первой единицы), которая дачт вероятность победы $1/3$. Можно доказать, что вероятность победы не может быть больше $3/8$. Есть статья с чуть более сложной стратегией, где вероятность выигрыша 0.35: https://arxiv.org/abs/1407.4711v5

Также есть обобщение задачи на n игроков: каждый игрок бросает монетку бесконечное число раз, но теперь видит результаты бросков всех игроков кроме себя. Игроки выигрывают, если каждый назовчт координату единицы в своей последовательности. Для такой игры есть стратегия, при которой игроки выигрывают с вероятностью $1/C \log n$.

Слабое насыщение в случайном графе

w-sat(G, F) — это наименьшее количество ребер в остовном подграфе G, не содержащем копий F, таком, что все ребра G можно восстановить одно за другим так, что при добавлении каждого следующего ребра добавляется хотя бы одна копия F. Известны значения w-sat(K_n, K_s) и асимптотика w-sat$(K_{m,n}, K_{r,s})$. Для случайного графа $G = G(n,p)$ задача решена только в случае полного графа F.

Предлагается найти (или оценить) w-sat$(K_n, K_{r,s})$ и w-sat$(G(n,p), K_{r,s})$.

Продвижения:

1. Задача для звезд $K_{1,s}$ решена для полного графа и для случайного в предположении, что либо $p \gg n^{-1/(s-1)}$, либо $p \ll n^{-1/(s-1)}/\ln n$ (для $s = 2, 3$ условия немного отличаются — для $s = 2$ получен более сильный результат, а для $s = 3$ — наоборот, более слабый).

2. Доказано, что w-sat$(K_n, K_{2,s}) = n + \frac{s^2}{2} + O(s)$.

3. Доказано, что w-sat$(K_n, K_{r,s}) \leq (r-1)(n-r+1) + \binom{s}{2}$.

Покрываем куб кубами

Рассмотрим d−мерный куб $[n]^d$. При $0 < k < n$ назовем его дискретными подкубами $[k]^d$ множества вида $S_1 \times \cdots \times S_d$, где каждое $S_i \in \binom{[n]}{k}$, а непрерывными подкубами — множества такого же вида, где S_i состоит из k подряд идущих чисел в $\mathbb{Z}_n$. Какого минимального числа таких подкубов $f(n, k; d)$ достаточно, чтобы целиком покрыть куб $[n]^d$? Точные значения функции $f(n, k; d)$ известны только при $d = 1, 2$, а также в тривиальном случае $k|n$. Интерес представляет нахождение этой функции при $d = 3$, а также в случае фиксированных n и k при растущих d (например, $f(3, 2; d)$).

Нижние оценки можно найти в https://core.ac.uk/download/pdf/82071329.pdf.

Например, известно, что при $d = 3$ как в непрерывном, так и в дискретном случае оцениваемая величина оценивается снизу $\lceil n/k \lceil n/k \lceil n/k \rceil \rceil \rceil$.

Продвижения для $d = 3$:

1. При $k \le n \le \frac{3}{2}k$ и $\frac{7}{4}k < n \le 2k$ обе исследуемые величины равны $\lceil n/k \lceil n/k \lceil n/k \rceil \rceil \rceil$.

2. В дискретном случае $\lceil n/k \lceil n/k \lceil n/k \rceil \rceil \rceil$ получается и при $\frac{3}{2} < k \le \frac{5}{3}n$.

3. В непрерывном случае при $n = \frac{7}{4}k$ ответ $\lceil n/k \lceil n/k \lceil n/k \rceil \rceil \rceil + 1 = 8$.

Решенные задачи

Клики в графе (**Задача решена**)

Пусть дан граф, у которого любые две n-клики имеют общую вершину и кликовое число не более $2n-2$. Верно ли, что в этом графе существует $n-1$ вершина, удаление которых приводит к уменьшению кликового числа хотя бы до $n-1$?

Цветная теорема Каратеодори (**Задача решена**)

Цветная теорема Каратеодори, доказанная Имре Барани в 80-ых, утверждает, что если конечные множества $S_1, ..., S_{d+1} \subset \mathbb{R}^d$ и точка o таковы, что $o \in \mathrm{conv} S_i$, то можно выбрать по одной точке p_i из S_i так, что $o \in \mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_{d+1})$.

Одно из усилений этой теоремы следующее (теорема была доказана двумя группами в 00-ых): если конечные непустые(!) множества $S_1, \ldots, S_{d+1} \subset R^d$ и точка о таковы, что $o \in \mathrm{conv}(S_i \cup S_j)$ для любых различных i и j, то можно выбрать по одной точке p_i из S_i так, что $o \in \mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_{d+1})$.

Можно убедиться, что нельзя усилить теорему для объединений трех множеств $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup S_{i_3}$ для любых различных i_1, i_2 и i_3. Но тогда возникает естественный вопрос.

Найти наименьшее $N := N(d)$ такое, что выполняется следующее утверждение. Если конечные непустые(!) множества $S_1, \ldots, S_N \subset \mathbb{R}^d$ и точка o таковы, что $o \in \mathrm{conv}(S_i \cup S_j \cup S_k)$ для любых различных i, j и k, то можно выбрать по одной точке p_i из S_i так, что $o \in \mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_N)$.

Несложно убедиться в конечности $N(d)$.

Новые задачи

Эффективность экзистенциальной логики

Под эффективностью предложения в логике первого порядка мы далее понимаем либо количество переменных в формуле, либо кванторную глубину формулы. Возникает вопрос об эффективности экзистенциальных формул: можно ли их записывать более эффективно с использованием квантора всеобщности?

Более формально, пусть φ, ψ — два тавтологически эквивалентные предложения в логике первого порядка, причем φ — экзистенциальное и наиболее эффективное (среди экзистенциальных тавтологически эквивалентных φ). Может ли быть такое, что ψ эффективнее чем φ?

Задача от Данилы

Рассмотрим $2k$-элементное множество X. Злобный оппонент выбрал ровно одно множество из каждой пары k-элементных множеств, дающих в объединении X. Получилось пересекающееся семейство, кстати (назовем его F).

Можно ли разбить на такие пары $(x_1, x_2), \ldots, (x_{2k-1}, x_{2k})$, что какие бы элементы злобный оппонент не выбрал из первых $k-1$ пар, мы могли бы выбрать элемент из последней пары, так что выбранные элементы образуют множество из F?

Comment: проверено на компьютере для $k = 3$ и, может быть, $k = 4$. Задача как-то связана с приложениями в экономике.

Также можно решать более легкую задачу, когда мы оставляем себе больше, чем 2 элемента. Другая интепретация: враг выбирает элементы в парах случайно.

Гипотеза о c-рамсеевости для случайных графов

Говорят, что граф на n вершинах обладает свойством c-рамсеевости, если как его число независимости, так и его кликовое число не больше чем $c\ln n$. Гипотеза Erdős, Faudree, Sós состоит в том, что для любого $c > 0$ найдется $b = b(c) > 0$ такое, что если граф G на n вершинах обладает свойством c-рамсеевости, то количество различных пар $(|V(H)|, |E(H)|)$ по всем индуцированным подграфам $H \subset G$ хотя бы $bn^{5/2}$. Недавно (2019 год) гипотеза была доказана Кваном и Судаковым. Ранее Алон и Косточка доказали справедливость этой гипотезы для случайного графа $G(n, 1/2)$. А именно они доказали, что с вероятностью, стремящейся к 1, для $k \leq 10^{-3}n$ множество $\{|E(H)| : H \subset G(n, 1/2) - \text{индуцированный с } |V(H)| = k\}$ содержит полный интервал размера $\Omega(k^{3/2})$.

Возникает следующий вопрос. Каково максимальное $\mu(k)$ такое, что с вероятностью, стремящейся к 1, для всех $k \leq n$ множество $\{|E(H)| : H \subset G(n, 1/2) - \text{индуцированный с } |V(H)| = k\}$ содержит полный интервал размера $\mu(k)$? Балог и Жуковский (2019 г.) нашли асимптотику (с точностью до мультипликативной константы) для $k \geq \varepsilon n$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие c, C, что $\mu(k) \leq Ck\sqrt{\frac{n-k}{n}\ln\binom{n}{k}}$ для всех k, $\mu(k) \geq ck^{3/2}$ для $k < \varepsilon n$ и $\mu(k) \geq ck\sqrt{\frac{n-k}{n}\ln\binom{n}{k}}$ для $k \geq \varepsilon n$.

Хочется найти асимптотику $\mu(k)$ и для $k < \varepsilon n$.